

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE DÉNOMBREMENT DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE POUR LA  
RELATION DE CLIC SUR LES ORIENTATIONS ACYCLIQUES D'UN  
GRAPHE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

PAR

CATHERINE BOURBEAU

AVRIL 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier très chaleureusement mon directeur Christophe Hohlweg qui m'a permis de réaliser ce mémoire et qui m'a poussé à me dépasser dès le début de ce projet. Merci pour l'aide, la disponibilité, les précieux conseils, le soutien financier et pour tout le temps qu'il m'a consacré. Merci de m'avoir appris à écrire les mathématiques et de m'avoir donné la chance de vivre mes premières expériences dans le milieu de l'enseignement.

Je remercie aussi bien spécialement les membres du jury pour le temps qu'ils accorderont à la lecture et à l'annotation de ce mémoire afin d'en enrichir le contenu.

Mes remerciements s'adressent également au personnel du LaCIM et à ses membres pour le soutien financier et pour l'ambiance chaleureuse qu'ils font régner au sein du laboratoire. Je remercie aussi les professeurs François Bergeron, Christophe Reutenauer et Franco Saliola qui ont occupé une place particulière dans mon cheminement mathématique en me transmettant leurs connaissances, chacun bien à leur manière. Merci aussi au professeur Gilbert Labelle pour sa présence et sa joie de vivre.

Je tiens aussi à remercier particulièrement Jérôme Tremblay d'abord pour son soutien informatique, mais surtout pour sa présence motivante au laboratoire. Merci aussi à Johanne Patoine pour ses encouragements et pour les nombreuses discussions enrichissantes. Merci également à Manon Gauthier pour son formidable travail administratif et ses conseils.

Je n'oublie pas mes amis, avec qui j'ai pu m'évader de mes pensées mathématiques pour mieux y revenir. Merci aussi à mes amis de l'UQAM et du LaCIM qui m'ont toujours soutenue. Je pense bien particulièrement à mes amis Lionel, Hugo, Maxime et Marco. Merci Lionel et Hugo pour ces précieuses années passées en votre compagnie depuis le

tout début. Merci Maxime d'avoir été aussi vaillant. C'en a été contagieux. Enfin, merci Marco d'avoir été présent lors de mon dernier droit vers l'acheminement de ce mémoire. Ta compagnie m'a permis non seulement d'en achever les derniers détails mathématiques, mais surtout de continuer à avancer malgré la motivation parfois fuyante.

Merci à ma très chère amie Stéphanie, tout simplement pour avoir été une si bonne amie depuis les premiers jours de notre parcours mathématique. Sans toi, les mathématiques n'auraient jamais été aussi divertissantes. Merci aussi à Laure pour son soutien malgré la distance. Merci de m'avoir comprise et de toujours avoir su trouver les mots justes pour m'encourager.

Je désire également remercier ma famille d'avoir cru en moi et de me l'avoir rappelé continuellement. Merci à mes parents pour leur soutien financier qui m'a permis d'entreprendre mes études universitaires.

Enfin, merci à Etienne pour sa compréhension et ses encouragements, mais surtout, merci d'être à mes côtés.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
RAPPELS . . . . .	5
1.1 Généralités sur les graphes . . . . .	5
1.1.1 Graphes orientés . . . . .	8
1.1.2 Suppression et contraction d'arête dans un graphe . . . . .	11
1.2 Orientation acyclique : représentation par permutation . . . . .	12
1.2.1 Orientations acycliques et ordres partiels . . . . .	13
1.2.2 Ordres totaux et orientations acycliques d'un graphe . . . . .	15
1.3 Commutativité de sommets non adjacents dans une permutation . . . . .	17
CHAPITRE II	
GRAPHES ORIENTÉS ET CLICS . . . . .	21
2.1 Relation de source-au-puits (clic) . . . . .	21
2.1.1 Clic et décalage cyclique . . . . .	22
2.1.2 Clic-équivalence . . . . .	24
2.2 Propriétés des classes de clics . . . . .	30
2.2.1 Suppression d'un arc dans un graphe orienté acyclique . . . . .	31
2.2.2 Contraction d'un arc dans un graphe orienté acyclique . . . . .	34
2.3 Dénombrement des $\kappa$ -classes d'équivalence . . . . .	39
2.3.1 Formule de récurrence pour $\kappa(Y)$ . . . . .	40
2.3.2 Clic et composantes connexes . . . . .	44
2.3.3 Rôle des ponts . . . . .	45
2.3.4 Un aperçu du graphe effondré . . . . .	48

CHAPITRE III	
GRAPHE EFFONDRE . . . . .	51
3.1 Construction du graphe effondré . . . . .	51
3.1.1 Relèvement d'une orientation acyclique . . . . .	54
3.1.2 Relèvement d'une $\kappa$ -classe d'équivalence . . . . .	58
3.1.3 Définition du graphe effondré . . . . .	64
3.2 Nature du graphe effondré . . . . .	66
3.2.1 Un invariant sur les classes de clic . . . . .	66
3.2.2 Le graphe effondré est une forêt . . . . .	70
3.3 Caractérisation des arêtes et des composantes connexes du graphe effondré .	75
3.3.1 Le nombre $\kappa(Y)$ correspond au nombre de composantes connexes du graphe effondré . . . . .	76
3.3.2 Fin de la démonstration du Théorème 2 . . . . .	80
CHAPITRE IV	
APPLICATIONS DE LA RELATION DE CLICS . . . . .	81
4.1 Groupes de Coxeter et éléments de Coxeter . . . . .	81
4.1.1 Dénombrement des classes de conjugaison des éléments de Coxeter .	83
4.1.2 Rotation d'un élément de Coxeter et clic . . . . .	83
4.2 Quelques résultats classiques . . . . .	85
4.3 Polynôme de Tutte . . . . .	86
4.3.1 Polynôme de Tutte et <i>coupe</i> -équivalence . . . . .	86
4.3.2 Coupe-équivalence d'orientations acycliques . . . . .	87
CONCLUSION . . . . .	91
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	93

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Exemple de graphe. . . . .	6
1.2 Composantes connexes d'un graphe. . . . .	7
1.3 Exemple de forêt. . . . .	8
1.4 Exemple d'orientation d'un graphe. . . . .	9
1.5 Exemple d'orientations acyclique et cyclique d'un graphe. . . . .	10
1.6 Sources et puits dans une orientation acyclique. . . . .	11
1.7 Suppression d'une arête d'un graphe. . . . .	11
1.8 Contraction d'une arête d'un graphe. . . . .	12
1.9 Orientation acyclique et ordre sur l'ensemble des sommets d'un graphe. .	13
1.10 Permutation sur l'ensemble des sommets d'un graphe et orientation acy- clique. . . . .	16
1.11 Transposition de sommets consécutifs non adjacents. . . . .	18
2.1 Exemple de clic sur une source. . . . .	22
2.2 Exemple d'application d'une suite de clics sur une orientation acyclique.	25
2.3 Suite de clics et permutations. . . . .	29
2.4 Suppression d'un arc dans une orientation. . . . .	31
2.5 Suppression d'arcs et permutations compatibles. . . . .	32
2.6 Exemple d'orientation $\alpha$ -contractile. . . . .	35
2.7 Contraction d'un arc d'une orientation. . . . .	36
2.8 Cycle de longueur $n$ dans lequel les sommets contractés $v$ et $w$ ne sont pas consécutifs. . . . .	39
2.9 Contraction d'un arc d'une orientation acyclique résultant en une orien- tation cyclique. . . . .	40

2.10	Liste des $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe $Y$ . . . . .	41
2.11	Suppression et contraction successives d'arêtes. . . . .	43
3.1	Exemple de restriction de classes d'équivalence suite à la suppression d'une arête. . . . .	53
3.2	Relèvement d'une orientation acyclique. . . . .	55
3.3	Le relèvement d'une orientation suivi de la contraction d'arc mène à l'identité. . . . .	57
3.4	Suppression et contraction d'une arête dans le graphe complet à 4 sommets. 65	
3.5	Relèvement de classes d'équivalence. . . . .	65
3.6	Graphe effondré du graphe complet à 4 sommets. . . . .	66
3.7	Exemple de calcul de la valeur de $\nu_P$ dans une orientation acyclique. . .	67
3.8	Graphe linéaire à 6 sommets. . . . .	72
3.9	Illustration de la preuve du Théorème 4. . . . .	74
4.1	Graphe de Coxeter du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ . . . . .	82
4.2	Éléments de Coxeter du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et leurs orientations associées. . . . .	83
4.3	Exemple de coupe orientée. . . . .	87
4.4	Exemple d'orientations coupe-équivalentes. . . . .	88



## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous présentons une formule de récurrence pour compter le nombre de classes d'équivalence des orientations acycliques d'un graphe  $Y$  sous la relation de *source-au-puits*, aussi appelée relation de *clic*. Cette formule de récurrence prend en considération le nombre de classes d'équivalence des graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  dont une arête  $a$  comprise dans un cycle du graphe  $Y$  a respectivement été supprimée et contractée. Pour démontrer cette formule, nous définissons le *graphe effondré*  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$ . Ce graphe effondré est construit de manière à illustrer le comportement particulier des classes d'équivalence des graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  pour la relation de clic. Cette formule de récurrence permet entre autres d'énumérer les classes de conjugaison des éléments de Coxeter dans les groupes de Coxeter.



## INTRODUCTION

Un groupe de Coxeter fini est un groupe fini engendré par des réflexions sur un espace euclidien. À chacun de ces groupes est associé son graphe de Coxeter, mettant en évidence les relations entre les générateurs. Les éléments de Coxeter, définis comme le produit une et une seule fois des réflexions engendrant le groupe, jouent un rôle important dans ces groupes. Notamment, la cardinalité d'un groupe de Coxeter peut être déterminée à partir de l'ordre d'un de ces éléments, voir par exemple (Humphreys, 1990). Nous pouvons généraliser ces notions au cas des groupes infinis en prenant un nombre fini de réflexions abstraites et en leur imposant les mêmes relations que celles du cas des groupes de Coxeter finis. Nous obtenons alors le cas général des groupes de Coxeter.

La motivation principale de ce mémoire est le dénombrement des classes de conjugaison des éléments de Coxeter pour un groupe de Coxeter infini. Dans le cas d'un groupe de Coxeter fini, il est bien connu que les éléments de Coxeter sont tous conjugués, voir par exemple (Humphreys, 1990, §3.16). Or, dans le cas d'un groupe de Coxeter infini, ce problème était seulement partiellement résolu : pour un groupe de Coxeter infini dont le graphe contient exactement un cycle de longueur  $n$ , les éléments de Coxeter de ce groupe forment  $n - 1$  classes de conjugaison, voir (Shi, 2001) ou (Eriksson et Eriksson, 2009). Pour le cas général d'un groupe de Coxeter infini, aucune solution n'avait été présentée jusqu'à la parution des articles *On enumeration of conjugacy classes of Coxeter elements* (Macauley et Mortveit, 2008) de Matthew Macauley et Henning S. Mortveit et *Conjugacy of Coxeter elements* (Eriksson et Eriksson, 2009) de Henrik et Kimmo Eriksson. Dans ce mémoire, nous présentons la solution de Macauley et Mortveit à ce problème. Cette solution élégante a le mérite supplémentaire de répondre à une question plus générale de théorie des graphes.

Dans leur article, les auteurs proposent une formule de récurrence comptant le nombre  $\kappa(Y)$  de classes d'équivalence pour la relation de *clic* définie sur l'ensemble des orientations acycliques d'un graphe quelconque  $Y$ . Si  $Y$  est un graphe quelconque et  $a$  une arête comprise dans un cycle du graphe  $Y$ , alors

$$\kappa(Y) = \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a)$$

où  $Y'_a$  et  $Y''_a$  sont respectivement les graphes obtenus en supprimant et contractant l'arête  $a$ .

Le lien entre la relation de clic et la conjugaison des éléments de Coxeter provient du fait que ces éléments sont en bijection avec les orientations acycliques du graphe de Coxeter. Il est montré dans l'article *Conjugacy of Coxeter elements* (Eriksson et Eriksson, 2009) que la conjugaison d'un élément de Coxeter correspond à la relation de *rotation* d'un mot sur l'ensemble des sommets du graphe associé au groupe de Coxeter, pour tout groupe de Coxeter. Or, cette relation de rotation d'un mot correspond exactement à la relation de clic. Nous concluons donc que dénombrer les classes de conjugaison des éléments de Coxeter d'un groupe de Coxeter dont  $Y$  est le graphe associé revient à trouver le nombre  $\kappa(Y)$  pour cette relation.

La relation de clic a originellement été introduite par Oliver Pretzel en 1986 dans son article *On reorienting graphs by pushing down maximal vertices* (Pretzel, 1986). Depuis, nous voyons apparaître cette relation dans plusieurs domaines des mathématiques, que ce soit en théorie de la représentation des carquois, dans le contexte du jeu de *chip-firing* ou encore en lien avec des systèmes dynamiques discrets où la relation de clic caractérise le *cycle equivalence* d'une classe particulière de ces systèmes, voir (Marsh, Reineke et Zelevinsky, 2003), (Björner, Lovász et Shor, 1991) et (Macauley et Mortveit, 2009). Cette dernière occurrence fut la motivation originale des auteurs Macauley et Mortveit.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. D'abord, nous rappelons dans le premier chapitre les notions de base concernant les graphes afin d'établir les notations utilisées tout au long de ce mémoire. Nous représentons aussi les orientations acycliques d'un

graphe sous forme de permutations sur l'ensemble de ses sommets. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont bien connus et sont mentionnés à titre de référence pour les résultats des sections suivantes.

Ensuite, nous introduisons dans la première partie du second chapitre la relation de clic sur une orientation acyclique et étudions le comportement de cette relation sur les permutations, vues comme des orientations acycliques. Puis, nous étudions à la Section 2.2 certaines caractéristiques des classes d'équivalence pour cette relation et présentons formellement la formule de récurrence comptant le nombre  $\kappa(Y)$  de ces classes d'équivalence. Nous définissons finalement dans la dernière section de ce chapitre le *graphe effondré*  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$ , qui est au coeur de la démonstration de cette formule de récurrence.

Nous consacrons entièrement le troisième chapitre à la construction du graphe effondré ainsi qu'à la démonstration de trois des propriétés de celui-ci sur lesquelles la démonstration de la formule de récurrence est basée.

Enfin, nous établissons le lien entre la conjugaison des éléments de Coxeter et la relation de clic sur les orientations acycliques d'un graphe dans le Chapitre 4. Nous présentons pour terminer la relation de *coupe* d'orientation acyclique et montrons que cette relation d'équivalence coïncide avec la relation de clic. Cette nouvelle relation nous permet alors de montrer que le nombre  $\kappa(Y)$  peut être retrouvé à partir du polynôme de Tutte.



## CHAPITRE I

### RAPPELS

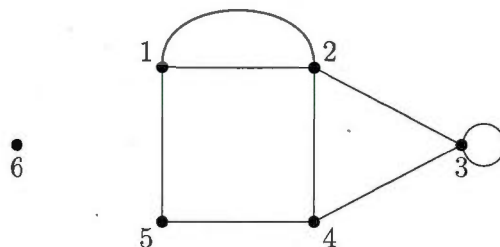
Le but de ce chapitre introductif est de rappeler les définitions et notations essentielles qui sont utilisées tout au long de ce mémoire. Nous commençons par définir les notions de graphe et de certains objets classiques qui lui sont associés, notamment les orientations acycliques. Nous définissons ensuite les fonctions de contraction et de suppression d'arête d'un graphe qui sont à la base de notre étude. Finalement, nous présentons les orientations acycliques d'un graphe comme des permutations sur l'ensemble des sommets de ce même graphe. Cette seconde définition nous permet de simplifier l'écriture de ces orientations et ainsi de faciliter la démonstration de certains résultats de ce mémoire.

#### 1.1 Généralités sur les graphes

Un *graphe*  $Y$  est la donnée d'un ensemble  $S_Y$  de *sommets* et d'un multi-ensemble<sup>1</sup>  $A_Y$  d'*arêtes*, où une arête du graphe  $Y$  est une paire  $\{v, w\}$  de sommets du graphe  $Y$ . Dans la suite de ce mémoire, nous considérons seulement les *graphes finis*, c'est-à-dire, les graphes dont l'ensemble des sommets est fini. Un *sous-graphe*  $Y' = (S_{Y'}, A_{Y'})$  du graphe  $Y$  est un graphe tel que  $S_{Y'} \subseteq S_Y$  et  $A_{Y'} \subseteq A_Y$ . Si  $Y'$  est un sous-graphe du graphe  $Y$ , alors  $Y$  *contient*  $Y'$ . Si  $S_{Y'} \subsetneq S_Y$  ou  $A_{Y'} \subsetneq A_Y$ , le

---

1. On rappelle qu'un élément peut être répété plusieurs fois dans un multi ensemble. Un ensemble est un multi ensemble dans lequel chaque élément apparait au plus une fois.



**Figure 1.1** Le graphe  $Y$  est constitué de l'ensemble de sommets  $S_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et de l'ensemble d'arêtes  $A_Y = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$ . Ce graphe n'est pas simple puisqu'il contient une arête multiple  $\{1, 2\}$  ainsi qu'une boucle  $\{3\}$ .

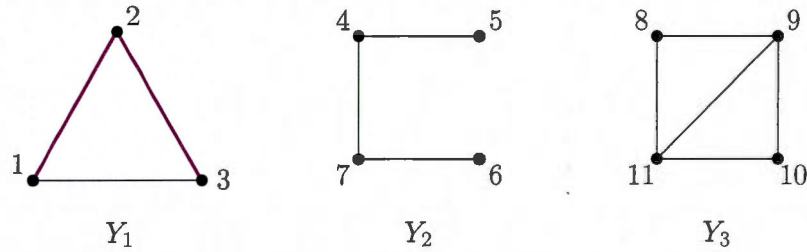
graphe  $Y'$  est alors un sous-graphe *propre* du graphe  $Y$ . Finalement, deux graphes  $Y$  et  $Y'$  sont *disjoints* si  $S_Y \cap S_{Y'} = \emptyset$  et  $A_Y \cap A_{Y'} = \emptyset$ .

Une *boucle* d'un graphe  $Y$  est une arête joignant un sommet de  $Y$  à lui-même. Par exemple, l'arête  $\{3\}$  du graphe représenté à la Figure 1.1 est une boucle. Une *arête multiple* est une collection d'au moins deux arêtes formées des deux mêmes sommets, c'est-à-dire qu'il y a répétition de cet élément dans le multi ensemble. L'arête  $\{1, 2\}$  du graphe représenté à la Figure 1.1 est une arête multiple. Un graphe est *simple* s'il ne contient aucune boucle et aucune arête multiple.

Si  $a = \{v, w\}$  est une arête du graphe  $Y$ , alors  $a$  est *incidente* aux sommets  $v$  et  $w$ . Dans ce cas,  $v$  et  $w$  sont *adjacents* ou *voisins* dans  $Y$ . Le degré  $\deg(v)$  d'un sommet  $v$  est le nombre d'arêtes qui sont incidentes à ce sommet. Si le degré d'un sommet est nul, alors ce sommet est *isolé*. Par exemple, le sommet 2 du graphe à la Figure 1.1 est de degré 3. Le sommet 6 quant à lui est de degré 0, donc est un sommet isolé.

Un *chemin*  $P = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  du sommet  $s_1$  vers le sommet  $s_k$  dans un graphe  $Y$  est une suite de sommets  $s_i$  de ce graphe tel que  $\{s_i, s_{i+1}\}$  est une arête de  $Y$  pour tout  $1 \leq i \leq k - 1$ . Ce chemin  $P$  est donc de *longueur*  $k - 1$  puisque la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes parcourues dans ce dernier. De plus, le chemin  $P$  est *simple* si tous les sommets du chemin sont différents. Un *cycle*  $C = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  est un chemin



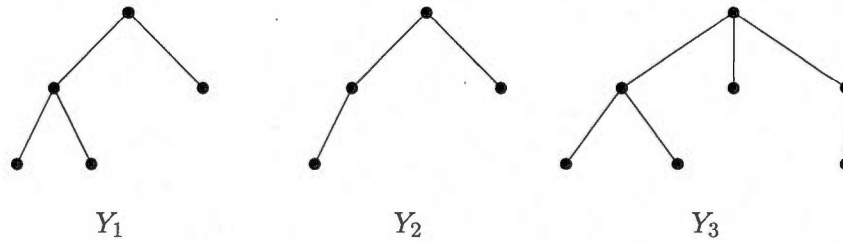


**Figure 1.2** Le graphe  $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3$  est non connexe puisqu'il n'existe aucun chemin de 1 vers 6 par exemple. Ce graphe est constitué de trois composantes connexes, soit les sous-graphes disjoints  $Y_1, Y_2$  et  $Y_3$ . Le graphe  $Y'_1$  tel que  $S_{Y'_1} = \{1, 2, 3\}$  et  $A_{Y'_1} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$  n'est pas une composante connexe de  $Y$  puisque  $Y'_1$  est contenu dans  $Y_1$ .

tel que  $s_1 = s_k$ . Nous notons donc  $C = (s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_1)$ . Un *pont* d'un graphe  $Y$  est une arête qui n'est contenue dans aucun cycle de ce graphe.

Un graphe  $Y$  est *connexe* si pour tout sommet  $v, w \in S_Y$  il existe un chemin de  $v$  vers  $w$ . Si un graphe n'est pas connexe, il est alors constitué d'au moins deux sous-graphes disjoints. Une *composante connexe* de  $Y$  est un sous-graphe connexe de  $Y$  qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe connexe de  $Y$  à part lui-même. Si un graphe  $Y$  est constitué des  $k$  composantes connexes  $Y_1, \dots, Y_k$ , nous notons alors  $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_k$ , voir la Figure 1.2 pour un exemple.

Finalement, avant d'introduire la notion d'orientation de graphe, rappelons trois types de graphes qui interviennent dans la suite de ce mémoire. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle, tandis qu'une *forêt* est un graphe sans cycle. Autrement dit, une forêt est l'union disjointe d'arbres. Un *graphe linéaire* à  $n$  sommets est un graphe simple ayant comme ensemble de sommet  $S_Y = \{1, 2, \dots, n\}$  et comme ensemble d'arêtes  $A_Y = \{\{i, i+1\}\}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ , voir la Figure 1.3 pour un exemple. Notons en particulier qu'un graphe linéaire à  $n$  sommets est un arbre contenant  $n-1$  arêtes.



**Figure 1.3** Le graphe  $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3$  est une forêt constituée des arbres  $Y_1, Y_2$  et  $Y_3$ . L'arbre  $Y_2$  est un graphe linéaire à 4 sommets et contient 3 arêtes.

### 1.1.1 Graphes orientés

Nous définissons maintenant la notion de graphe orienté qui est à la base de notre étude. Nous revoyons aussi certains des objets définis à la section précédente dans cette nouvelle optique des graphes orientés. Nous nous intéressons tout particulièrement aux graphes orientés acycliques.

Une *orientation*  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y$  est la donnée une fonction  $\mathcal{O}_Y: A_Y \rightarrow S_Y \times S_Y$  telle que l'image de  $\{v, w\} \in A_Y$  est l'un des deux couples  $(v, w)$  ou  $(w, v)$ . Dans le premier cas, l'arête  $\{v, w\}$  est orientée du sommet  $v$  vers le sommet  $w$  et dans le deuxième cas, elle est orientée du sommet  $w$  vers le sommet  $v$ . Par exemple, l'orientation illustrée à la Figure 1.4 est définie comme suit :

$$\mathcal{O}_Y: A_Y \rightarrow S_Y \times S_Y$$

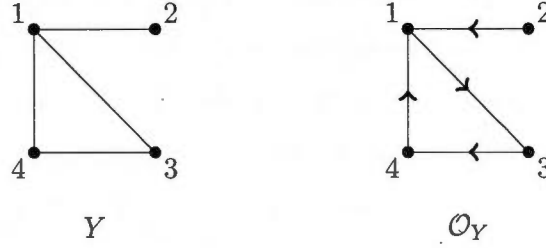
$$\{1, 2\} \mapsto (2, 1)$$

$$\{1, 4\} \mapsto (4, 1)$$

$$\{1, 3\} \mapsto (1, 3)$$

$$\{3, 4\} \mapsto (3, 4)$$

*Remarque 1.* Si  $Y = (S_Y, A_Y)$  est un graphe *discret*, c'est-à-dire un graphe sans arête, alors  $A_Y = \emptyset$  et il existe alors une unique orientation de  $Y$  qui correspond à la fonction vide  $\mathcal{O}_Y: \emptyset \rightarrow S_Y \times S_Y$ . Nous appelons cette orientation l'*orientation triviale*.

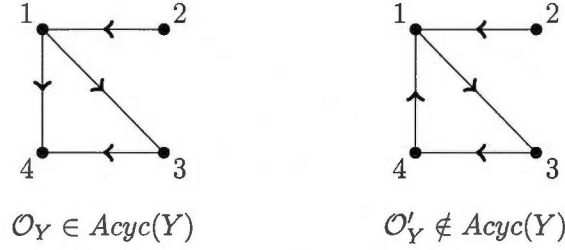


**Figure 1.4** Le graphe  $Y$  et une orientation  $\mathcal{O}_Y$  de ce graphe.

Nous notons  $\mathcal{O}r(Y)$  l'ensemble des orientations du graphe  $Y$ . Un *graphe orienté* est une paire  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  où chacune des arêtes du graphe  $Y$  est orientée par l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ . Une arête orientée est appelée un *arc* et par conséquent, un graphe orienté est constitué d'un ensemble de sommets et d'un multi ensemble d'arcs. Par abus de langage, nous disons qu'un graphe orienté  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  est une orientation de  $Y$  et notons seulement  $\mathcal{O}_Y$  plutôt que  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Si  $(v, w)$  est un arc d'une orientation  $\mathcal{O}_Y$ , alors l'arc  $(v, w)$  est *entrant* dans le sommet  $w$  et *sortant* du sommet  $v$ . Nous notons alors  $d^+(v)$  le nombre d'arcs entrants dans le sommet  $v \in S_Y$ . De même,  $d^-(v)$  est le nombre d'arcs sortants du sommet  $v$ .

Un *chemin orienté* dans une orientation  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y$  est un chemin du graphe  $Y$  qui respecte l'orientation des arcs de  $\mathcal{O}_Y$ . Autrement dit,  $P = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  est un chemin orienté si  $(s_i, s_{i+1})$  est un arc de  $\mathcal{O}_Y$  pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ . Ainsi, un *cycle orienté*  $C = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  dans une orientation  $\mathcal{O}_Y$  est un chemin orienté tel que  $s_1 = s_k$ . Comme pour les graphes non orientés, nous notons donc  $C = (s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_1)$ . Une orientation  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y$  est *acyclique* si elle ne contient aucun cycle orienté, voir Figure 1.5 pour un exemple. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si une orientation contient au moins un cycle, alors cette orientation est *cyclique*. Dans la suite, nous nous intéressons tout particulièrement aux orientations acycliques d'un graphe. L'ensemble des orientations acycliques d'un graphe  $Y$  est noté  $Acyc(Y)$ .

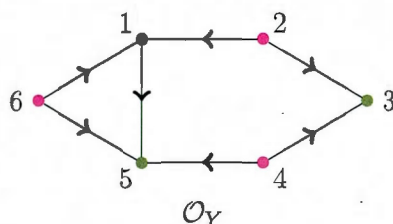
*Remarque 2.* Comme l'orientation triviale ne contient aucun cycle, elle est donc acyclique.



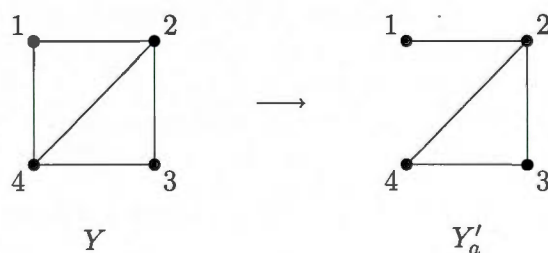
**Figure 1.5** L'orientation  $\mathcal{O}_Y$  est acyclique puisqu'elle ne contient aucun cycle orienté. Or,  $\mathcal{O}'_Y$  est cyclique puisque  $C = (1, 3, 4, 1)$  est un cycle orienté de  $\mathcal{O}'_Y$ .

Notons que si un graphe  $Y$  contient une boucle, alors  $|\text{Acyc}(Y)| = 0$ . En effet, en orientant l'arête  $\{x\}$ , nous créons un cycle  $C = (x, x)$  et donc toute orientation de  $Y$  est nécessairement cyclique. De plus, supposons qu'un graphe  $Y$  contient une arête multiple  $\{v, w\}$ . Pour qu'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  soit acyclique, tous les arcs associés à l'arête  $\{v, w\}$  dans  $\mathcal{O}_Y$  doivent être orientés dans le même sens, soit  $(x, y)$  ou  $(y, x)$ . Sinon, cette orientation contiendrait le cycle  $C = (x, y, x)$  et serait donc cyclique. Comme nous nous intéressons exclusivement aux orientations acycliques dans ce mémoire, nous supposons sans perte de généralité dans la suite que les graphes étudiés sont *simples*, c'est-à-dire, qu'ils ne contiennent aucune boucle et aucune arête multiple. En particulier, leur multi ensemble d'arêtes est un ensemble.

Deux types de sommets liés aux orientations acycliques jouent un rôle particulier dans ce mémoire : les sources et les puits. Une *source*  $i$  d'une orientation est un sommet tel que tous les arcs qui lui sont incidents sont sortants, c'est-à-dire,  $\deg^+(i) = 0$ . De manière analogue, un *puits*  $p$  d'une orientation est un sommet tel que tous les arcs qui lui sont incidents sont entrants, c'est-à-dire,  $\deg^-(p) = 0$ . Par exemple, les sommets 3 et 5 de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  représentée à la Figure 1.6 sont des puits tandis que les sommets 2, 4 et 6 sont des sources. Notons que toute orientation acyclique d'un graphe fini contient au moins une source et au moins un puits. De plus, si une orientation acyclique possède plusieurs sources, ces dernières ne peuvent être adjacentes, c'est-à-dire qu'aucun arc ne peut les relier. Il en est de même pour les puits.



**Figure 1.6** L'orientation  $\mathcal{O}_Y$  contient trois sources, soit les sommets 2, 4 et 6 ainsi que deux puits, soit les sommets 3 et 5.



**Figure 1.7** Suppression de l'arête  $a = \{1, 4\}$ .

*Remarque 3.* Un sommet isolé  $s$  dans un graphe  $Y$  est un sommet dont le degré est nul. En particulier, si  $\mathcal{O}_Y$  est une orientation de  $Y$ , nous avons que  $\deg^+(s) = \deg^-(s) = 0$  dans  $\mathcal{O}_Y$  et donc  $s$  est à la fois une source et un puits.

### 1.1.2 Suppression et contraction d'arête dans un graphe

À partir d'un graphe donné  $Y = (S_Y, A_Y)$  et d'une de ses arêtes, nous allons définir deux opérations qui consistent à supprimer et contracter cette arête. Les graphes obtenus suite à l'application de ces deux opérations jouent un rôle important dans la suite de ce mémoire.

Tout d'abord, à partir de  $Y$  nous obtenons un nouveau graphe  $Y'_a$  en supprimant une arête quelconque  $a = \{x, y\} \in A_Y$ , c'est-à-dire en conservant les sommets  $x$  et  $y$  mais en supprimant l'arête  $a$  qui les relie. Ainsi, le graphe obtenu en supprimant l'arête

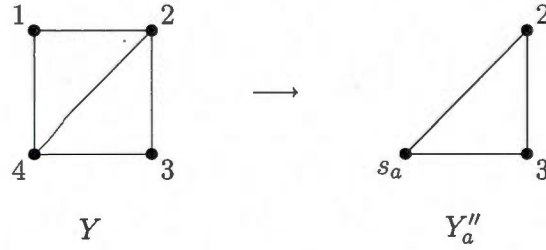


Figure 1.8 Contraction de l'arête  $a = \{1, 4\}$ .

$a$  du graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  est le graphe  $Y'_a = (S_Y, A_Y \setminus \{a\})$ , voir la Figure 1.7.

De manière analogue, à partir de  $Y$  nous obtenons un nouveau graphe  $Y''_a$  en contractant une arête quelconque  $a = \{x, y\} \in A_Y$ , c'est-à-dire en contractant les deux sommets  $x$  et  $y$  pour former un nouveau sommet noté  $s_a$ . Ce nouveau sommet devient alors adjacent à tous les anciens voisins de  $x$  et  $y$ . De plus, si  $\{x, z\}$  et  $\{y, z\}$  sont des arêtes du graphe  $Y$ , alors ces arêtes deviennent une unique arête  $\{s_a, z\}$  dans  $Y''_a$ , voir la Figure 1.8.

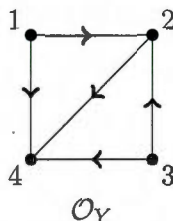
Formellement, la contraction d'une arête  $a = \{x, y\} \in A_Y$  du graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  donne lieu au nouveau graphe  $Y''_a = (S_{Y''_a}, A_{Y''_a})$  où

$$\begin{cases} S_{Y''_a} := (S \setminus \{x, y\}) \cup \{s_a\} \\ A_{Y''_a} := \left\{ \{v, w\} \in A_Y \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset \right\} \\ \quad \cup \left\{ \{s_a, v\} \mid \{x, v\}, \{y, v\} \in A_Y \setminus \{x, y\} \right\} \end{cases}$$

## 1.2 Orientation acyclique : représentation par permutation

Nous avons donné au tout début de ce chapitre la définition de la notion d'orientation d'un graphe. Dans cette section, nous expliquons que toute orientation acyclique sur un graphe peut être représentée par une liste ordonnée des sommets de ce graphe, en d'autres mots, par une permutation.





**Figure 1.9** À partir de l'orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$ , nous obtenons la relation d'ordre suivante :  $1 <_{\mathcal{O}_Y} 2$ ,  $1 <_{\mathcal{O}_Y} 4$ ,  $2 <_{\mathcal{O}_Y} 4$ ,  $3 <_{\mathcal{O}_Y} 2$ ,  $3 <_{\mathcal{O}_Y} 4$ .

### 1.2.1 Orientations acycliques et ordres partiels

Il est bien connu que le graphe d'un ensemble ordonné est un graphe orienté acyclique, voir par exemple (Knuth, 1981). Réciproquement, soit  $Y = (S_Y, A_Y)$  un graphe, à chaque orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  de  $Y$  correspond un ordre partiel sur l'ensemble  $S_Y$  des sommets de ce graphe, voir par exemple (Bogart, 2000). Cet ordre partiel est défini par la relation de couverture suivante :

$$x <_{\mathcal{O}_Y} y \text{ si } \{x, y\} \in A_Y \text{ et } \mathcal{O}_Y(\{x, y\}) = (x, y).$$

Ainsi, pour  $x, y \in S_Y$ ,  $x <_{\mathcal{O}_Y} y$  dans  $\mathcal{O}_Y$  si et seulement si il existe un chemin orienté de  $x$  vers  $y$ .

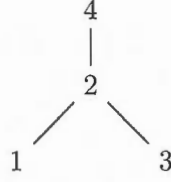
*Remarque 4.* L'acyclicité d'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  garanti que la relation  $<_{\mathcal{O}_Y}$  soit asymétrique. En effet, s'il existe un chemin orienté de  $x$  vers  $y$  alors il n'existe pas de chemin orienté de  $y$  vers  $x$  puisque  $\mathcal{O}_Y$  est acyclique. Ainsi, nous avons bien que si  $x <_{\mathcal{O}_Y} y$  alors  $y \not<_{\mathcal{O}_Y} x$ .

Commençons par présenter un exemple afin de développer notre intuition.

**Exemple 1.** À partir de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  représentée à la Figure 1.9, nous obtenons la relation d'ordre

$$1 <_{\mathcal{O}_Y} 2, \quad 1 <_{\mathcal{O}_Y} 4, \quad 2 <_{\mathcal{O}_Y} 4, \quad 3 <_{\mathcal{O}_Y} 2, \quad 3 <_{\mathcal{O}_Y} 4$$

dont le diagramme de Hasse est



Maintenant nous allons associer à l'ordre partiel  $<_{\mathcal{O}_Y}$  un ordre total  $<$ , c'est-à-dire, une permutation. Les éléments 1 et 3 sont minimaux dans le diagramme de Hasse de  $<_{\mathcal{O}_Y}$ . Nous décidons que  $1 < 3$  et donc nous obtenons la permutation  $\pi_{\mathcal{O}_Y} = 1342$  qui correspond à l'ordre total  $1 < 3 < 4 < 2$ , dont  $<_{\mathcal{O}_Y}$  est un sous-ordre. Notons que nous aurions aussi pu choisir  $3 < 1$  et donc l'ordre total  $3 < 1 < 4 < 2$  se restreint aussi à l'ordre  $<_{\mathcal{O}_Y}$ . Il n'y a donc pas qu'un unique ordre total dont  $<_{\mathcal{O}_Y}$  est un sous-ordre.

Rappelons maintenant un peu de vocabulaire afin d'exprimer ce que nous avons observé dans l'exemple précédent. Si un ensemble fini  $X$  est muni d'un ordre total, alors tous ses éléments peuvent être disposés en une liste ordonnée, c'est-à-dire, une permutation. Un ordre total  $<$  sur un ensemble fini  $X$  qui contient un ordre partiel  $\prec$  comme sous-ordre est appelé *extension linéaire* de l'ordre  $\prec$ . Le problème qui consiste à assigner une extension linéaire à un ordre partiel est bien connu sous le nom de *tri topologique*. Dans le livre *The art of computer programming* (Knuth, 1981), Donald E. Knuth présente un algorithme résolvant ce problème. Il démontre aussi avec cet algorithme qu'il est toujours possible d'attribuer une extension linéaire à tout ordre partiel défini sur un ensemble fini. Notons toutefois que ceci avait originellement été montré par Edward Szpilrajn (Szpilrajn, 1930). En particulier, comme à partir de toute orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe fini  $Y = (S_Y, A_Y)$  nous obtenons un ordre partiel sur l'ensemble  $S_Y$ , il est possible grâce au tri topologique de représenter cette orientation par une liste ordonnée des sommets de ce graphe. Autrement dit, toute orientation acyclique d'un graphe  $Y$  peut être représentée par une permutation de l'ensemble  $S_Y$ .

**Définition 1.** Soit  $Y$  un graphe tel que  $|S_Y| = n$  et soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique de  $Y$ . Soit  $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n$  une extension linéaire de l'ordre obtenu à partir de l'orienta-



tion  $\mathcal{O}_Y$ . Alors  $\pi$  est appelée une permutation *compatible* avec  $\mathcal{O}_Y$  et réciproquement, l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  est dite *compatible* avec  $\pi$ .

Nous écrivons dans la suite de ce mémoire une permutation  $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  comme un mot sur l'alphabet  $S_Y$  des sommets d'un graphe  $Y$ . Ainsi,  $\pi_i$  est à la fois un sommet de  $Y$  et une lettre dans la permutation  $\pi$ . Nous utilisons ces terminologies indistinctement selon le contexte dans la suite de ce mémoire.

*Remarque 5.* Comme nous avons noté à l'exemple 1, une permutation compatible avec une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y$  n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si l'ensemble des sommets  $S_Y$  muni de l'ordre obtenu à partir de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  contient  $k$  éléments minimaux, alors il y a  $k!$  façons d'ordonner totalement ces éléments.

Nous voyons dans la proposition suivante que pour un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$ , les éléments minimaux de  $S_Y$  muni de l'ordre obtenu à partir d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  sont soit des sources de  $\mathcal{O}_Y$ , soit des sommets isolés:

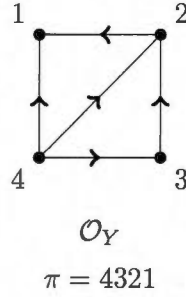
**Proposition 1.** *Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique d'un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  et  $<_{\mathcal{O}_Y}$  l'ordre obtenu à partir de  $\mathcal{O}_Y$ . Si  $v$  est un élément minimal de  $S_Y$  pour l'ordre  $<_{\mathcal{O}_Y}$ , alors  $v$  est soit une source de  $\mathcal{O}_Y$ , soit un sommet isolé.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un élément minimal de  $S_Y$  doté de l'ordre  $<_{\mathcal{O}_Y}$  obtenu à partir de l'orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$ . Comme  $v$  est minimal, il n'est précédé d'aucun autre sommet. Autrement dit, il n'existe aucun arc de la forme  $(w, v)$  dans  $\mathcal{O}_Y$  car sinon, nous aurions  $w <_{\mathcal{O}_Y} v$ . En particulier,  $\deg^+(v) = 0$ , d'où  $v$  est une source ou un sommet isolé.

■

### 1.2.2 Ordres totaux et orientations acycliques d'un graphe

Nous avons vu à la section précédente que chaque orientation acyclique d'un graphe peut être représentée par une permutation (pas forcément unique) sur l'ensemble



**Figure 1.10** La permutation  $\pi = 4321$  définit l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  représentée ci-dessus. En effet, nous avons par exemple que  $\mathcal{O}_Y(\{1, 2\}) = (2, 1)$  car 2 précède 1 dans  $\pi$ ,  $\mathcal{O}_Y(\{1, 4\}) = (4, 1)$  car 4 précède 1 dans  $\pi$ , etc.

des sommets du graphe associé. Réciproquement, nous voyons dans cette section qu'à toute permutation de l'ensemble  $S_Y$  des sommets d'un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  est associée une orientation acyclique de ce graphe.

**Définition 2.** Soit  $Y = (S_Y, A_Y)$  un graphe quelconque et soit  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  une permutation de  $S_Y$ . Alors  $\pi$  définit l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  comme suit : pour toute arête  $\{x, y\} \in A_Y$

$$\mathcal{O}_Y(\{x, y\}) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } x \text{ précède } y \text{ dans } \pi \\ (y, x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme à la section précédente, nous disons alors que  $\pi$  et  $\mathcal{O}_Y$  sont compatibles.

Par exemple, la Figure 1.10 illustre l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  définie par la permutation  $\pi = 4321$ .

*Remarque 6.* L'orientation  $\mathcal{O}_Y$  définie par une permutation  $\pi$  de  $S_Y$  est unique et acyclique. En effet, supposons que  $\mathcal{O}_Y$  soit cyclique, c'est-à-dire, qu'il existe un cycle  $C = (s_1, \dots, s_k, s_1)$  dans  $\mathcal{O}_Y$ . En particulier, il existe un chemin de  $s_1$  vers  $s_k$  et un chemin de  $s_k$  vers  $s_1$ . Ainsi  $s_1$  doit précéder  $s_k$  dans  $\pi$  et  $s_k$  doit précéder  $s_1$  dans  $\pi$ . Ceci est impossible puisque l'ordre  $\pi$  est asymétrique. Ainsi,  $\mathcal{O}_Y$  est bien acyclique. De

plus, chaque arête  $\{v, w\} \in A_Y$  est uniquement orientée par le fait que soit  $v$  précède  $w$  dans  $\pi$  ou alors  $w$  précède  $v$ . Ainsi, la permutation  $\pi$  définit une unique orientation pour chaque arête de  $Y$ , donc une unique orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

**Proposition 2.** *Soit  $Y = (S_Y, A_Y)$  un graphe tel que  $|S_Y| = n$  et soit  $\mathcal{O}_Y$  l'orientation acyclique définie par la permutation  $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  de l'ensemble  $S_Y$ . Alors  $\pi_1$  est une source ou un sommet isolé et  $\pi_n$  est un puits ou un sommet isolé.*

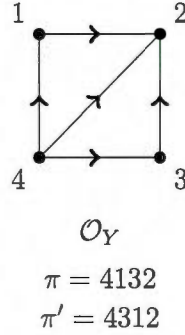
*Démonstration.* Si  $\{\pi_1, \pi_i\} \in A_Y$ , alors  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_1, \pi_i\}) = (\pi_1, \pi_i)$  pour tout  $\pi_i \in S_Y$  où  $1 < i \leq n$ . D'où  $\pi_1$  est une source ou un sommet isolé. De même, si  $\{\pi_i, \pi_n\} \in A_Y$ , alors  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_i, \pi_n\}) = (\pi_i, \pi_n)$  pour tout  $\pi_i \in S_Y$  où  $1 \leq i < n$ . D'où  $\pi_n$  est un puits ou un sommet isolé. ■

### 1.3 Commutativité de sommets non adjacents dans une permutation

Nous avons remarqué dans l'Exemple 1 que les permutations  $\pi = 3142$  et  $\pi' = 1342$  étaient des permutations compatibles avec l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ . Nous spécifions dans la Proposition 3 dans quel cas particulier deux permutations peuvent être compatibles avec une même orientation : pour une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$ , si deux sommets non adjacents apparaissent successivement dans une permutation  $\pi$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , alors la permutation obtenue en transposant ces deux sommets dans  $\pi$  est aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Un exemple de ceci est illustré à la Figure 1.11.

**Proposition 3.** *Soit  $Y = (S_Y, A_Y)$  un graphe tel que  $|S_Y| = n$ . Soit  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$  et  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Soit  $1 \leq i \leq n - 1$ , alors  $\pi' = \pi_1 \dots \pi_{i+1} \pi_i \dots \pi_n$  est une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  si et seulement si  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \notin A_Y$ .*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord l'implication directe. Soit  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$  et  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  une permutation compatible avec l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ . Supposons que la permutation  $\pi' = \pi_1 \dots \pi_{i+1} \pi_i \dots \pi_n$  est aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  et vérifions que  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \notin A_Y$ . Supposons par contradiction que  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\}$  est une arête du graphe  $Y$ .



**Figure 1.11** La permutation  $\pi = 4\mathbf{1}32$  est compatible avec l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  illustrée ci-dessus. Or,  $\pi' = 4\mathbf{3}12$  est aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , car les sommets 1 et 3 apparaissent successivement dans  $\pi$  et  $\{1, 3\} \notin A_Y$ .

Puisque  $\pi$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , alors  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_i, \pi_{i+1}\}) = (\pi_i, \pi_{i+1})$  car la lettre  $\pi_i$  précède la lettre  $\pi_{i+1}$  dans  $\pi$ . Or, comme  $\pi'$  est aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , nous avons aussi  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_i, \pi_{i+1}\}) = (\pi_{i+1}, \pi_i)$  car la lettre  $\pi_{i+1}$  précède la lettre  $\pi_i$  dans  $\pi'$ . Ceci est contradictoire puisqu'une arête d'un graphe simple ne peut avoir deux orientations différentes. Ainsi  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \notin A_Y$ .

Montrons maintenant la réciproque. Soit  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \notin A_Y$ . Vérifions que la permutation  $\pi' = \pi_1 \dots \pi_{i+1} \pi_i \dots \pi_n$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . D'abord, nous avons par hypothèse que  $\pi = \pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Autrement dit, si  $\{\pi_j, \pi_k\} \in A_Y$  et  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = (\pi_j, \pi_k)$ , alors la lettre  $\pi_j$  précède la lettre  $\pi_k$  dans  $\pi$  pour tout  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Il suffit donc de montrer que pour toute arête  $\{\pi_j, \pi_k\} \in A_Y$ , si  $\pi_j$  précède  $\pi_k$  dans  $\pi$ , il en est de même dans  $\pi'$ . Nous avons que pour tout  $j, k \in \{1 \dots n\}$ , si  $\pi_j$  précède  $\pi_k$  dans  $\pi$ , alors  $\pi_j$  précède aussi  $\pi_k$  dans  $\pi'$ , sauf dans le cas où  $\{\pi_j, \pi_k\} = \{\pi_i, \pi_{i+1}\}$ . Or, comme  $\{\pi_i, \pi_{i+1}\} \notin A_Y$ , on a bien que si  $\{\pi_j, \pi_k\} \in A_Y$  et  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = (\pi_j, \pi_k)$ , alors la lettre  $\pi_j$  précède la lettre  $\pi_k$  dans  $\pi'$  pour tout  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . D'où  $\pi'$  est bien compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . ■

Rappelons finalement que si une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  contient plusieurs sources,

ces sources ne sont pas adjacentes dans le graphe  $Y$ . D'après la proposition précédente, deux sources qui apparaissent successivement dans une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  peuvent donc être transposées. En particulier, nous montrons dans la proposition suivante que si une source  $i$  d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  n'est pas la première lettre d'une permutation  $\pi$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , il est toujours possible d'effectuer des transposition de sommets consécutifs non adjacents à partir de cette permutation  $\pi$  afin que la source  $i$  de  $\mathcal{O}_Y$  devienne la première lettre d'une permutation aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ .

**Proposition 4.** *Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y$  et  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ .*

- (i) *Si  $\pi_k$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$  et  $\pi_k \neq \pi_1$ , alors  $\pi' = \pi_k \pi_1 \dots \widehat{\pi_k} \dots \pi_n$  est une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  (le symbole  $\widehat{\pi_k}$  signifie que nous omettons la lettre  $\pi_k$  dans le mot);*
- (ii) *Si  $\pi_k$  et  $\pi_l$  sont deux sources de  $\mathcal{O}_Y$  pour  $k \neq l$ , alors  $\pi'' = \pi_k \pi_l \pi_1 \dots \widehat{\pi_k} \dots \widehat{\pi_l} \dots \pi_n$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . En particulier, si  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_p}$  sont les sources de  $\mathcal{O}_Y$ , alors la permutation  $\pi^{(0)} = \pi_{i_1} \dots \pi_{i_p} \pi_1 \dots \widehat{\pi_{i_1}} \dots \widehat{\pi_{i_p}} \dots \pi_n$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Il en est de même de toutes les permutations obtenues en permutant les  $\pi_{i_j}$  pour  $1 \leq j \leq p$ ;*
- (iii) *Si  $\pi_k$  est un puits de  $\mathcal{O}_Y$  et  $\pi_k \neq \pi_n$ , alors  $\pi' = \pi_1 \dots \widehat{\pi_k} \dots \pi_n \pi_k$  est une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ .*
- (iv) *Si  $\pi_k$  et  $\pi_l$  sont deux puits de  $\mathcal{O}_Y$  pour  $k \neq l$ , alors  $\pi'' = \pi_1 \dots \widehat{\pi_l} \dots \widehat{\pi_k} \dots \pi_n \pi_l \pi_k$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . En particulier, si  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_p}$  sont les puits de  $\mathcal{O}_Y$ , alors la permutation  $\pi^{(0)} = \pi_1 \dots \widehat{\pi_{i_1}} \dots \widehat{\pi_{i_p}} \dots \pi_n \pi_{i_1} \dots \pi_{i_p}$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Il en est de même de toutes les permutations obtenues en permutant les  $\pi_{i_j}$  pour  $1 \leq j \leq p$ ;*

*Démonstration.* (i) Si  $\pi_k$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ , alors toute arête  $\{\pi_i, \pi_k\} \in A_Y$  est sortante de  $\pi_k$ , c'est-à-dire, est orientée  $(\pi_k, \pi_i)$  dans  $\mathcal{O}_Y$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi, aucune des lettres précédant  $\pi_k$  dans  $\pi$  n'est un sommet adjacent à  $\pi_k$  dans le graphe  $Y$ . Sinon,  $\{\pi_i, \pi_k\}$  serait une arête de  $Y$  pour tout pour  $1 \leq i < k$  et donc nous aurions



$\mathcal{O}_Y(\{\pi_i, \pi_k\}) = (\pi_i, \pi_k)$  puisque la lettre  $\pi_i$  précède la lettre  $\pi_k$  dans  $\pi$ . Ceci contredit le fait que  $\pi_k$  est une source. Par conséquent, nous avons que  $\{\pi_i, \pi_k\} \notin A_Y$  pour  $1 \leq i < k$ . En vertu de la Proposition 3, nous pouvons donc transposer la source  $\pi_k$  successivement avec les sommets  $\pi_{k-1}, \pi_{k-2}, \dots, \pi_2$  et  $\pi_1$  sans changer l'orientation de  $\mathcal{O}_Y$ . Par conséquent, la permutation  $\pi' = \pi_k \pi_1 \dots \widehat{\pi_k} \dots \pi_n$  est bien compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ .

- (ii) Supposons que la source  $\pi_l$  de  $\mathcal{O}_Y$  précède la source  $\pi_k$  dans la permutation  $\pi = \pi_1 \dots \pi_l \dots \pi_k \dots \pi_n$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . D'après l'énoncé précédent,  $\pi_l$  peut être transposée successivement avec tous les sommets qui précèdent  $\pi_l$  dans  $\pi$ , et la permutation ainsi obtenue est toujours compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Nous pouvons ensuite faire de même avec la source  $\pi_k$  et donc la permutation  $\pi'' = \pi_k \pi_l \pi_1 \dots \widehat{\pi_k} \dots \widehat{\pi_l} \dots \pi_n$  ainsi obtenue est aussi compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ .

Maintenant, soit  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_p}$  les sources de  $\mathcal{O}_Y$ , où  $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$ . En reprenant l'argument précédent avec  $\pi_{i_p}$  puis  $\pi_{i_{p-1}}$ , etc., nous obtenons que la permutation  $\pi^{(0)} = \pi_{i_1} \dots \pi_{i_{p-1}} \pi_1 \dots \widehat{\pi_{i_1}} \dots \widehat{\pi_{i_p}} \dots \pi_n$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Comme les  $i_1, \dots, i_p$  ne sont pas ordonnés, il en est de même avec toutes les permutations obtenues en permutant les  $\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_p}$ .

- (iii) La preuve est similaire à (i), en remplaçant le terme *source* par le terme *puits*, le terme *sortant* par le terme *entrant* puis le verbe *précéder* par le verbe *succéder*.
- (iv) La preuve est similaire à (ii), en effectuant les mêmes remplacements de termes énumérés en (iii).



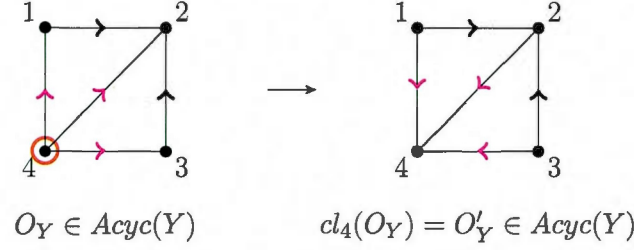
## CHAPITRE II

### GRAPHES ORIENTÉS ET CLICS

Nous introduisons dans ce chapitre une relation d'équivalence, appelée *relation de source-au-puits* ou *clic*, définie sur l'ensemble des orientations acycliques d'un graphe quelconque  $Y$ . Le but principal est de donner ultérieurement une formule de récurrence afin de compter le nombre  $\kappa(Y)$  de classes d'équivalence pour cette relation. L'énoncé de cette formule de récurrence fait appel au nombre de  $\kappa$ -classes d'équivalence des graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  obtenus respectivement en supprimant et contractant une arête  $a$  contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Afin de démontrer cette formule, nous introduisons plus particulièrement les fonctions de suppression et de contraction d'un arc d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$ . Nous étudions alors la relation de clic sur les orientations résultantes. Finalement, nous donnons le plan de la démonstration de la formule de récurrence ainsi qu'un exemple de calcul de  $\kappa(Y)$  à partir de cette formule. La démonstration elle-même fait l'objet du Chapitre 3 de ce mémoire.

#### 2.1 Relation de source-au-puits (clic)

Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique d'un graphe quelconque  $Y$  et  $i$  une source de  $\mathcal{O}_Y$ . Nous appelons une *relation de source-au-puits* ou un *clic* sur la source  $i$  le fait d'inverser tous les arcs incidents à cette source, voir Figure 2.1. Nous montrons dans le Corollaire 1 que l'ensemble  $Acyc(Y)$  des orientations acycliques d'un graphe est fermé sous l'opération de clic.



**Figure 2.1** Clic sur la source 4 de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

Un clic sur une source  $i$  d'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  se définit par la fonction suivante :

$$cl_i : \text{Acyc}(Y) \longrightarrow \text{Acyc}(Y)$$

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow cl_i(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$$

tel que pour toute arête  $b$  du graphe  $Y$  nous avons

$$\mathcal{O}'_Y(b) = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(b) & \text{si } i \notin b \\ (x, i) & \text{si } b = \{x, i\} \text{ pour } x \in S_Y. \end{cases}$$

Dans le cas où  $b = \{x, i\}$ , comme  $i$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ , nous avons forcément  $\mathcal{O}_Y(b) = (i, x)$  et donc en cliquant  $i$  nous obtenons  $\mathcal{O}'_Y(b) = (x, i)$ . La Figure 2.1 représente un exemple de clic sur le sommet 4 de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

*Remarque 7.* Nous définissons aussi le *clic trivial*, noté  $cl_{triv}$ , sur un sommet isolé d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$ . Rappelons qu'un sommet isolé n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe  $Y$ . Ainsi,  $cl_{triv}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$  car cliquer un tel sommet ne change l'orientation d'aucun arc de  $\mathcal{O}_Y$ . Comme cliquer un sommet isolé d'une orientation acyclique n'a aucun effet sur cette orientation, nous considérons uniquement dans la suite de ce mémoire les graphes ne contenant aucun sommet isolé.

### 2.1.1 Clic et décalage cyclique

Comme une orientation acyclique d'un graphe  $Y$  peut aussi se représenter comme une permutation sur l'ensemble des sommets de ce graphe, nous étudions maintenant le



comportement de la relation de clic sur une telle permutation.

**Définition 3.** Soit  $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$  une permutation d'un ensemble à  $n$  éléments. Nous appelons un *décalage cyclique* sur  $\pi$  l'action de déplacer la première lettre  $\pi_1$  à la toute fin de la permutation  $\pi$ . La permutation obtenue en effectuant un décalage cyclique sur  $\pi$  est donc  $\pi' = \pi_2\ldots\pi_n\pi_1$ .

La proposition suivante stipule que si  $\mathcal{O}_Y$  est une orientation acyclique d'un graphe  $Y$  et  $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , alors effectuer un décalage cyclique sur  $\pi$  est équivalent à cliquer la source  $\pi_1$  de  $\mathcal{O}_Y$ .

**Proposition 5.** Soit  $Y = (S_Y, A_Y)$  un graphe tel que  $|S_Y| = n$  et soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique de  $Y$ . Soit  $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Alors  $cl_{\pi_1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  si et seulement si  $\pi' = \pi_2\ldots\pi_n\pi_1$  est compatible avec  $\mathcal{O}'_Y$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$  une permutation compatible avec l'orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  telle que  $cl_{\pi_1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Rappelons que nous avons vu au chapitre précédent que le sommet  $\pi_1$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ . Vérifions que  $\pi' = \pi_2\ldots\pi_n\pi_1$  est compatible avec  $\mathcal{O}'_Y$ , c'est-à-dire que si  $\mathcal{O}'_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = (\pi_j, \pi_k)$ , alors la lettre  $\pi_j$  précède la lettre  $\pi_k$  dans  $\pi'$ . Par définition du clic, nous avons pour une arête  $b \in A_Y$

$$\mathcal{O}'_Y(b) = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(b) & \text{si } \pi_1 \notin b \\ (\pi_j, \pi_1) & \text{si } b = \{\pi_j, \pi_1\} \text{ pour } j \in \{2, \dots, n\}. \end{cases}$$

Soit  $j, k$  tel que  $\mathcal{O}'_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = (\pi_j, \pi_k)$ . Si  $\pi_1 \notin \{\pi_j, \pi_k\}$ , alors  $\mathcal{O}_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = (\pi_j, \pi_k)$  et donc  $\pi_j$  précède  $\pi_k$  dans  $\pi$  et il en est de même dans  $\pi'$ . De plus, pour toute arête  $\{\pi_j, \pi_1\}$  où  $j \in \{2, \dots, n\}$ , nous avons par définition que  $\mathcal{O}'_Y(\{\pi_j, \pi_1\}) = (\pi_j, \pi_1)$  et la lettre  $\pi_j$  précède bien la lettre  $\pi_1$  dans  $\pi'$  pour tout  $j \in \{2, \dots, n\}$ . D'où  $\pi'$  est bien compatible avec  $\mathcal{O}'_Y$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y$  et  $\pi = \pi_1\ldots\pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Supposons que  $\pi' = \pi_2\ldots\pi_n\pi_1$  est une permutation compatible avec une orientation acyclique  $\mathcal{O}'_Y$  de  $Y$ . Montrons que  $\mathcal{O}'_Y = cl_{\pi_1}(\mathcal{O}_Y)$ ,

c'est-à-dire, montrons que pour toute arête  $b \in A_Y$ ,

$$\mathcal{O}'_Y(b) = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(b) & \text{si } \pi_1 \notin b \\ (\pi_j, \pi_1) & \text{si } b = \{\pi_j, \pi_1\} \text{ pour } j \in \{2, \dots, n\}. \end{cases}$$

Soit  $\{\pi_j, \pi_k\} \in A_Y$  telle que  $\pi_1 \notin \{\pi_j, \pi_k\}$ . Nous avons que  $\mathcal{O}'_Y(\{\pi_j, \pi_k\}) = \mathcal{O}_Y(\{\pi_j, \pi_k\})$  car si  $\pi_j$  précède  $\pi_k$  dans  $\pi$ , il en est de même dans  $\pi'$ . De plus, soit  $\{\pi_j, \pi_1\} \in A_Y$  où  $j \in \{2, \dots, n\}$ , nous avons bien que  $\mathcal{O}'_Y(\{\pi_j, \pi_1\}) = (\pi_j, \pi_1)$  car  $\pi_j$  précède  $\pi_1$  dans  $\pi'$ . Ainsi,  $\mathcal{O}'_Y = cl_{\pi_1}(\mathcal{O}_Y)$ . ■

*Remarque 8.* Si  $\mathcal{O}_Y$  est une orientation acyclique et  $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ , nous notons autant  $cl_{\pi_1}(\mathcal{O}_Y)$  ou  $cl_{\pi_1}(\pi)$  pour désigner le clic sur la source  $\pi_1$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ . Par la Proposition 5, nous avons donc  $cl_{\pi_1}(\pi) = \pi_2 \dots \pi_n \pi_1$ .

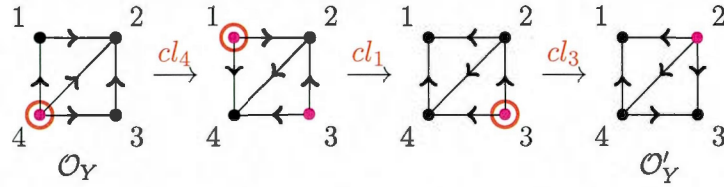
Nous pouvons maintenant montrer que l'ensemble des orientations acycliques d'un graphe est fermé sous l'opération de clic.

**Corollaire 1.** *Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique d'un graphe  $Y$ . Si une orientation  $\mathcal{O}'_Y$  est obtenue d'un clic sur  $\mathcal{O}_Y$ , alors  $\mathcal{O}'_Y$  est aussi acyclique.*

*Démonstration.* En vertu de la Proposition 5, un clic sur une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  se définit par un décalage cyclique sur une permutation  $\pi$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Or le résultat d'un décalage cyclique sur  $\pi$  est aussi une permutation. Comme nous avons vu au chapitre précédent qu'une permutation sur l'ensemble des sommets définit une orientation acyclique de ce graphe, alors l'orientation obtenue par un clic sur une orientation acyclique est aussi acyclique. ■

### 2.1.2 Clic-équivalence

Deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  d'un graphe  $Y$  sont *clic-équivalentes*, ou  $\kappa$ -équivalentes, s'il existe une suite de clic  $cl = cl_{s_n} \circ \dots \circ cl_{s_2} \circ cl_{s_1}$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Nous notons alors  $\mathcal{O}_Y \sim_{\kappa} \mathcal{O}'_Y$ . Par abus de langage, nous écrivons aussi bien  $cl =$



**Figure 2.2** En appliquant la suite de clics  $cl = cl_4 cl_1 cl_3$  à l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ , nous obtenons l'orientation  $\mathcal{O}'_Y$ . Autrement dit,  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ .

$cl_{s_1} cl_{s_2} \dots cl_{s_n}$  sous forme de liste, du premier sommet cliqué  $s_1$  au dernier sommet cliqué  $s_n$ , plutôt que sous forme de composition de fonctions de clic. La Figure 2.2 illustre les différentes orientations d'un graphe  $Y$  obtenues par une suite de clics sur l'orientation de départ  $\mathcal{O}_Y$ .

*Remarque 9.* Les sommets cliqués dans une suite de clics ne sont pas nécessairement distincts. En effet, si nous cliquons un sommet, il est possible de le cliquer de nouveau dès qu'il redevient une source. Notons que cela arrive dès que tous ses sommets adjacents ont chacun été cliqués une et une seule fois.

Cette relation de clic-équivalence est en particulier une relation d'équivalence. Afin de montrer ce résultat, nous avons besoin de la proposition suivante et de son corollaire.

**Proposition 6.** Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique d'un graphe  $Y$ .

- (i) Il existe une suite de clics dans laquelle tous les sommets de  $Y$  sont cliqués exactement une fois. Nous nommons une telle suite une suite de clics simple complète.
- (ii) Si  $cl$  est une suite de clics simple complète, alors  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  et soit  $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . La suite de clics  $cl = cl_{\pi_1} cl_{\pi_2} \dots cl_{\pi_n}$  est une suite de clics sur  $\mathcal{O}_Y$  telle que chaque sommet de  $S_Y$  est cliqué exactement une fois.

- (ii) Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  et  $cl$  une suite de

clics simple complète sur  $\mathcal{O}_Y$ . Supposons que  $S_Y = \{1, 2, \dots, n\}$  et montrons que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$  par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $Y$ . Rappelons que dans le cas où  $|A_Y| = 0$ , l'unique orientation de  $Y$  est l'orientation triviale et comme tous les sommets de  $S_Y$  sont isolés, toute suite de clics simple complète sur cette orientation résulte à cette même orientation triviale.

Supposons que  $|A_Y| = 1$  et notons  $A_Y = \{\{v, w\}\}$ . Notons aussi  $S_Y = \{v, w, s_1, s_{n-2}\}$  puisque  $|S_Y| = n$ . Dans ce cas,  $s_i$  est un sommet isolé de  $Y$  pour tout  $1 \leq i \leq n-2$ . Supposons aussi sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$ . Alors  $v$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$  et nous notons  $cl_v(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Ainsi,  $\mathcal{O}'_Y(\{v, w\}) = (w, v)$  car  $v$  est devenu un puits. Réciproquement,  $w$  est maintenant une source de  $\mathcal{O}'_Y$  et nous notons  $cl_w(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}''_Y$ . D'où  $\mathcal{O}''_Y(\{v, w\}) = (v, w)$ . Par conséquent,  $\mathcal{O}''_Y(\{v, w\}) = \mathcal{O}_Y(\{v, w\})$  et alors  $cl_w \circ cl_v(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . De plus, cliquer des sommets isolés d'une orientation ne change l'orientation d'aucune arête dans cette orientation. Ainsi,  $cl_v cl_w cl_{s_1} \dots cl_{s_{n-2}}$ , où  $s_i \in S_Y \setminus \{v, w\}$  est une suite de clics simple complète sur  $\mathcal{O}_Y$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ .

Supposons maintenant que  $|A_Y| = k$ . Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique de  $Y$ . Supposons que  $cl = cl_{s_1} \dots cl_{s_n}$  est une suite de clics simple complète telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . Vérifions qu'en ajoutant une arête  $\{v, w\}$  à l'ensemble  $A_Y$ , nous obtenons toujours que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . Supposons sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$ . En particulier,  $v$  doit être cliqué avant  $w$  dans la suite  $cl$  où  $v$  et  $w$  sont cliqués exactement une fois. Ainsi, après avoir cliqué  $v$  dans la suite  $cl$ , l'arête  $\{v, w\}$  est alors orientée  $(w, v)$ . Puis en cliquant par la suite le sommet  $w$ , l'arête  $\{v, w\}$  est finalement orientée  $(v, w)$ . D'où  $cl(\mathcal{O}_Y)(\{v, w\}) = \mathcal{O}_Y(\{v, w\})$ . De plus, pour toute arête  $\{s_i, s_j\} \in A_Y$  nous avons que  $cl(\mathcal{O}_Y)(\{s_i, s_j\}) = \mathcal{O}_Y(\{s_i, s_j\})$  par hypothèse de récurrence. Ainsi, nous avons bien  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$  pour toute suite de clics simple complète  $cl$ .

■

Nous déduisons de cette dernière proposition qu'un clic sur une orientation acy-

clique peut toujours être inversé. Autrement dit, si  $cl_i(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ , alors il existe une suite de clics sur  $\mathcal{O}'_Y$  qui nous ramène à l'orientation de départ  $\mathcal{O}_Y$ . C'est ce que nous voyons dans le corollaire suivant.

**Corollaire 2.** *Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique d'un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  où  $|S_Y| = n$ . Soit  $i$  une source de  $\mathcal{O}_Y$  et  $cl_i(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Il existe alors une suite de clics  $cl = cl_{s_1} \dots cl_{s_{n-1}}$  où  $s_1, \dots, s_{n-1} \in S_Y \setminus \{i\}$  telle que  $cl(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_Y$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  où  $|S_Y| = n$ . Par la Proposition 6, il existe une suite de clics simple complète  $cl = cl_{s_1} cl_{s_2} \dots cl_{s_n}$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . En particulier, si  $i$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ , il existe une permutation  $\pi$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  telle que  $i$  soit la première lettre de cette permutation. Nous pouvons alors effectuer un décalage cyclique sur  $\pi$ , c'est-à-dire, cliquer cette source  $i$  en premier. Posons  $cl_i(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Nous avons alors que  $cl = cl_i cl_{s_2} \dots cl_{s_n}$  est une suite de clics simple complète telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . Ainsi, la suite de clics  $cl' = cl_{s_2} \dots cl_{s_n}$  est une suite de clics sur  $\mathcal{O}'_Y$  où  $s_2, \dots, s_n \in S_Y \setminus \{i\}$  et telle que  $cl'(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_Y$ . D'où le résultat. ■

**Proposition 7.** *La relation  $\sim_\kappa$  est une relation d'équivalence.*

*Démonstration.* Nous devons montrer que  $\sim_\kappa$  est réflexive, transitive et symétrique. Soit  $Y$  un graphe quelconque et  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$ . Par la Proposition 6, il existe une suite de clics simple complète  $cl$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y$ . Ainsi,  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}_Y$  et donc  $\sim_\kappa$  est réflexive. De plus, si  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y \sim_\kappa \mathcal{O}''_Y$ , il existe donc deux suites de clics  $cl$  et  $cl'$  telles que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  et  $cl'(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}''_Y$ . Soit  $cl'' = cl' \circ cl$ . Alors  $cl''(\mathcal{O}_Y) = cl' \circ cl(\mathcal{O}_Y) = cl'(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}''_Y$  et par conséquent  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}''_Y$ . D'où  $\sim_\kappa$  est transitive. Finalement, soit  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$ . Il existe donc une suite de clics  $cl$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Pour montrer que  $\sim_\kappa$  est symétrique, nous utilisons le fait que si un clic sur une orientation acyclique peut être inversé, alors une suite de clics peut aussi l'être. Posons  $cl = cl_{s_1} cl_{s_2} \dots cl_{s_k}$  la suite de clics telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  où les sommets  $s_j$  ne sont



pas nécessairement tous distincts. Notons  $\mathcal{O}_Y'' = cl_{s_{k-1}} \circ \dots \circ cl_{s_2} \circ cl_{s_1}(\mathcal{O}_Y)$  :

$$cl_{s_k} \circ \underbrace{cl_{s_{k-1}} \circ \dots \circ cl_{s_2} \circ cl_{s_1}(\mathcal{O}_Y)}_{\mathcal{O}_Y''} = \mathcal{O}_Y'.$$

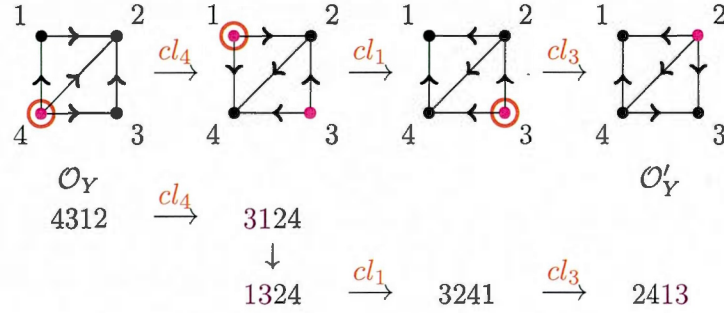
Si  $k = 1$ , alors  $cl_{s_k}(\mathcal{O}_Y'') \sim_\kappa \mathcal{O}_Y''$  par le Corolaire 2. Puis par récurrence, nous avons  $\mathcal{O}_Y^{(k-1)} \sim_\kappa \mathcal{O}_Y$ . La transitivité de la relation de clic nous permet alors de conclure que  $\mathcal{O}_Y' \sim_\kappa \mathcal{O}_Y$ . D'où  $\sim_\kappa$  est symétrique. ■

Maintenant qu'il est clair que la relation de clic est une relation d'équivalence, rappelons que le but de ce mémoire est de dénombrer les classes d'équivalence de l'ensemble des orientations acycliques  $Acyc(Y)$  du graphe  $Y$ , ou par abus de langage, les classes d'équivalence du graphe  $Y$ , pour cette relation. Nous notons ces classes les  $\kappa$ -classes du graphe  $Y$ . Avant d'énoncer la formule de récurrence qui nous permet d'atteindre cet objectif, nous étudions cette relation de clic en terme de permutations et observons quelques caractéristiques des  $\kappa$ -classes des graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  obtenus en supprimant et contractant l'arête  $a$  du graphe  $Y$ .

### Clic-équivalence et décalage cyclique

Cliquer une source  $i$  d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  est équivalent à faire un décalage cyclique sur une permutation  $\pi = i\pi_2 \dots \pi_n$  qui lui est compatible. De plus, transposer deux sommets non adjacents consécutifs dans une permutation ne change pas l'orientation définie par celle-ci. Ainsi nous donnons dans la proposition suivante une condition nécessaire et suffisante pour parler de clic-équivalence en terme de permutations : deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_Y'$  sont clic-équivalentes si et seulement si il existe deux permutations  $\pi$  et  $\pi'$  respectivement compatibles avec  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_Y'$  telles que  $\pi'$  peut être obtenue à partir de  $\pi$  par une suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets non adjacents consécutifs dans une permutation. La Figure 2.3 illustre un exemple de ceci.

**Proposition 8.** *Soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y'$  deux orientations acycliques du graphe  $Y$  et  $\pi, \pi'$  deux permutations compatibles avec  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_Y'$  respectivement. Alors  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}_Y'$  si et seule-*



**Figure 2.3** Les permutations 4312 et 2413 sont compatibles avec les orientations respectives  $O_Y$  et  $O'_Y$  illustrées ci-dessus. De plus, comme les sommets 1 et 3 ne sont pas adjacents dans le graphe  $Y$ , nous pouvons transposer ces sommets lorsque ceux-ci apparaissent successivement dans une permutation. Ainsi, la permutation 2431 peut être obtenue à partir de 4312 par une suite de décalages cycliques et de transpositions des sommets 1 et 3 si ils sont consécutifs dans une permutation.

ment si  $\pi'$  peut être obtenue de  $\pi$  par une suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$ .

*Démonstration.* Soit  $O_Y, O'_Y$  deux orientations acycliques du graphe  $Y$  où  $|S_Y| = n$ . Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux permutations compatibles avec  $O_Y$  et  $O'_Y$  respectivement. Supposons que  $O_Y \sim_\kappa O'_Y$ . Il existe donc une suite de clics  $cl$  telle que  $cl(O_Y) = O'_Y$ . Par récurrence, il suffit de considérer le cas où un seul sommet est cliqué. Notons donc  $cl = cl_i$  pour  $i \in S_Y$ . En particulier, le sommet  $i$  est une source de  $O_Y$  par définition de la relation de clic. D'après la Proposition 4 (i) du chapitre précédent, nous pouvons supposer que  $\pi = i\pi_1 \dots \pi_{n-1}$ . De même, comme le sommet  $i$  est cliqué dans  $O_Y$ , alors  $i$  est un puits dans l'orientation  $O'_Y = cl_i(O_Y)$ . Ainsi, en vertu de la Proposition 4 (iii), nous supposons que  $\pi' = \pi'_1 \dots \pi'_{n-1}i$ .

Par la Proposition 5, cliquer la source  $i$  revient à effectuer un décalage cyclique sur  $\pi$ . Nous avons donc que  $cl_i(O_Y) = cl_i(\pi) = \pi_1 \dots \pi_{n-1}i = \pi''$  est une permutation compatible avec  $O'_Y$  et donc les permutations  $\pi' = \pi'_1 \dots \pi'_{n-1}i$  et  $\pi'' = \pi_1 \dots \pi_{n-1}i$  sont

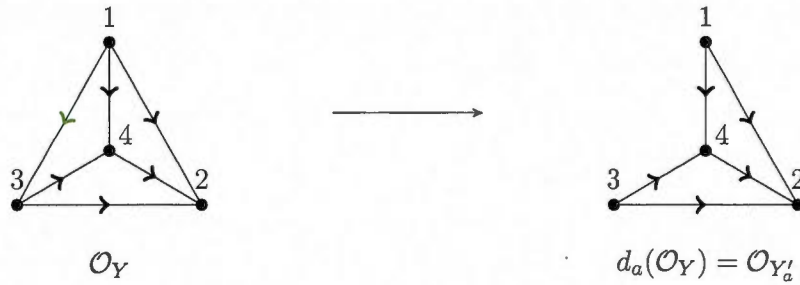
deux permutations compatibles avec  $\mathcal{O}'_Y$ . Considérons le sous-graphe  $Y'$  du graphe  $Y$  constitué des sommets  $S_Y \setminus \{i\}$  et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble des arêtes de  $Y$ , privé des arêtes de  $Y$  dont un sommet est  $i$ . Soit  $\mathcal{O}'_{Y'}$ , l'orientation du graphe  $Y'$  obtenue par restriction de  $\mathcal{O}'_Y$ . Les permutations  $\pi_1 \dots \pi_{n-1}$  et  $\pi'_1 \dots \pi'_{n-1}$  sont donc compatibles avec l'orientation  $\mathcal{O}'_{Y'}$ . Par récurrence sur le nombre de sommets du graphe  $Y$ , nous concluons donc que  $\pi_1 \dots \pi_{n-1}$  et  $\pi'_1 \dots \pi'_{n-1}$  sont obtenues par une suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$ . Il en est donc de même pour  $\pi', \pi''$  et  $\pi$ .

Montrons maintenant la réciproque. Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux permutations respectivement compatibles avec les orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$ . Supposons que  $\pi'$  est obtenue de  $\pi$  par une suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$ . Par la Proposition 5, une suite de décalages cycliques à partir d'une permutation est une suite de clics à partir de l'orientation compatible avec cette permutation. La Proposition 3 quant à elle assure que la transposition de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$  dans une permutation ne change l'orientation d'aucune arête de l'orientation compatible avec cette permutation. Par conséquent, l'orientation  $\mathcal{O}'_Y$  est obtenue à partir de  $\mathcal{O}_Y$  par une suite de clics et donc  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$ . ■

## 2.2 Propriétés des classes de clics

Nous avons défini au premier chapitre les graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  obtenus respectivement après suppression et contraction d'une arête  $a$  du graphe non orienté  $Y$ . Nous allons maintenant nous intéresser aux opérations de suppression et de contraction d'un arc d'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  dont les orientations résultantes sont respectivement notées  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  et  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ . En particulier, nous remarquons que la contraction d'un arc n'est pas toujours possible et que la suppression d'un arc d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  est aussi bien définie sur l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$ .





**Figure 2.4** Suppression de l'arc  $(1, 3)$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

### 2.2.1 Suppression d'un arc dans un graphe orienté acyclique

La suppression d'un arc d'une orientation est très similaire à la suppression d'une arête d'un graphe. Nous définissons la fonction de suppression  $d_a$  d'un arc  $a = (v, w)$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  comme suit :

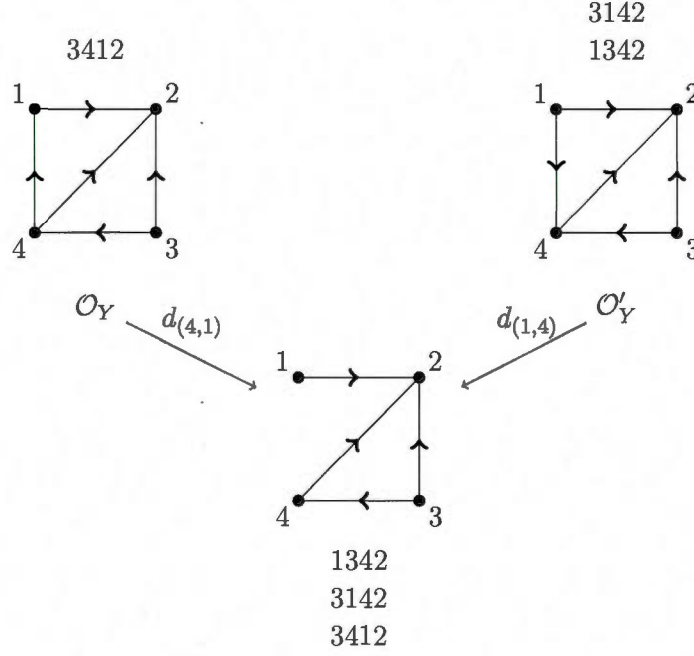
$$d_a : \mathcal{O}r(Y) \longrightarrow \mathcal{O}r(Y'_a)$$

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$$

tel que pour toute arête  $b$  de  $Y'_a$  nous avons  $\mathcal{O}_{Y'_a}(b) = \mathcal{O}_Y(b)$ . Voir Figure 2.4 pour un exemple.

*Remarque 10.* Si  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$ , alors  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a} \in \text{Acyc}(Y'_a)$ . En effet, si  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(\mathcal{O}_Y)$ , alors pour tout chemin orienté  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathcal{O}_Y$  nous avons  $x_1 \neq x_n$ . Soit  $P' = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  un chemin orienté de  $\mathcal{O}_{Y'_a}$ . En particulier  $P'$  est aussi un chemin orienté de  $\mathcal{O}_Y$  car pour toute arête  $b$  de  $Y'_a$  nous avons  $\mathcal{O}_{Y'_a}(b) = \mathcal{O}_Y(b)$ . Ainsi  $w_1 \neq w_k$  et donc  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  ne contient aucun cycle. Nous restreignons alors la fonction  $d_a$  à l'ensemble des orientations acycliques.

Étudions maintenant la suppression d'un arc  $a = (v, w)$  d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  en terme de permutations. Comme les sommets  $v$  et  $w$  sont adjacents dans l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ , ces deux sommets ne peuvent pas être transposés s'ils apparaissent successivement dans une permutation  $\pi$  compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Or, en supprimant l'arc  $a = (v, w)$ , la transposition de  $v$  et  $w$  devient possible s'ils sont consécutifs dans une



**Figure 2.5** Les permutations 3412 et 3142 (ou 1342) sont respectivement compatibles avec les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  qui diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a = \{1, 4\}$ . Ainsi, les permutations 3412, 3142 et 1342 sont toutes compatibles avec l'orientation obtenue en supprimant l'arc  $(4, 1)$  de  $\mathcal{O}_Y$  ou l'arc  $(1, 4)$  de  $\mathcal{O}'_Y$  puisque la transposition des sommets 4 et 1 est alors permise.

permutation  $\pi'$  compatible avec l'orientation résultante  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$ . Nous montrons dans le Corollaire 3 que deux permutations qui sont compatibles avec deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  qui diffèrent seulement par l'arc  $a$  sont compatibles avec l'orientation  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$  du graphe  $Y'_a$ , voir Figure 2.5 pour un exemple. Montrons d'abord plus généralement qu'une permutation  $\pi$  est compatible avec  $\mathcal{O}_Y$  si elle l'est aussi avec l'orientation  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  obtenue en supprimant l'arc  $a$  de  $\mathcal{O}_Y$ .

**Proposition 9.** Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique du graphe  $Y$  et  $\pi$  une permutation compatible avec  $\mathcal{O}_Y$ . Alors  $\pi$  est compatible avec l'orientation  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$  obtenue en supprimant l'arc  $a$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

*Démonstration.* Comme la permutation  $\pi$  est compatible avec l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ ,  $\pi$  est une extension linéaire de l'ordre obtenu à partir de  $\mathcal{O}_Y$ . Mais comme  $Y'_a$  est un sous graphe de  $Y$  et que tous les arcs de  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  sont orientés comme dans  $\mathcal{O}_Y$ , alors  $\pi$  est aussi une extension linéaire de l'ordre obtenu à partir de  $\mathcal{O}_{Y'_a}$ . Ainsi,  $\pi$  est compatible avec  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$ . ■

**Corollaire 3.** *Soit  $Y$  un graphe et  $a$  une arête de  $Y$ . Soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y$  deux orientations acycliques de  $Y$  dont  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux permutations respectivement compatibles. Si  $d_a(\mathcal{O}_Y) = d_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$ , alors  $\pi$  et  $\pi'$  sont compatibles avec  $\mathcal{O}_{Y'_a}$ .*

*Démonstration.* Comme les permutations  $\pi$  et  $\pi'$  sont respectivement compatibles avec les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$ , nous avons par la Proposition 9 que  $\pi$  et  $\pi'$  sont aussi compatibles avec  $d_a(\mathcal{O}_Y) = d_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$ . D'où le résultat. ■

Nous voyons dans le chapitre suivant que cette caractéristique de la suppression d'arc joue un rôle important lorsque nous étudions les  $\kappa$ -classes d'équivalence des orientations acycliques du graphe  $Y'_a$ . En effet, nous avons vu qu'en supprimant un arc d'une orientation acyclique, l'orientation obtenue est elle aussi acyclique. Nous montrons dans la proposition suivante que la suppression d'arc est aussi bien définie sur l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$ .

**Proposition 10.** *La fonction  $d_a$  se factorise en la fonction  $\mathcal{D}_a$  de l'ensemble quotient  $\text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa$  vers l'ensemble quotient  $\text{Acyc}(Y'_a)/\sim_\kappa$*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a: \text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa &\rightarrow \text{Acyc}(Y'_a)/\sim_\kappa \\ [\mathcal{O}_Y] &\mapsto [\mathcal{O}_{Y'_a}] \end{aligned}$$

où l'orientation  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  est obtenue en supprimant l'arc  $a$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

*Démonstration.* Vérifions que les images d'orientations acycliques contenues dans une même  $\kappa$ -classe de  $\text{Acyc}(Y)$  par la fonction de suppression d'arc  $d_a$  sont contenues dans une même  $\kappa$ -classe de  $\text{Acyc}(Y'_a)$ . Soit  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$  et  $\pi$  une permutation compatible

avec  $\mathcal{O}_Y$ . Si  $\mathcal{O}'_Y \in [\mathcal{O}_Y]$  et  $\pi'$  est compatible avec  $\mathcal{O}'_Y$ , alors  $\pi'$  peut être obtenue à partir de  $\pi$  par une suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$ . Soit  $d_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$  et  $d_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}'_{Y'_a}$ . Vérifions que  $\mathcal{O}'_{Y'_a} \in [\mathcal{O}_{Y'_a}]$ . Par la Proposition 9, les permutations  $\pi$  et  $\pi'$  sont respectivement compatibles avec  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  et  $\mathcal{O}'_{Y'_a}$ . De plus, comme les sommets qui sont non adjacents dans  $Y$  le sont aussi dans  $Y'_a$ , la permutation  $\pi'$  peut être obtenue à partir de  $\pi$  par la même suite de décalages cycliques et de transpositions de sommets consécutifs non adjacents dans  $Y$ . Ainsi, nous avons bien que  $\mathcal{O}_{Y'_a} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y'_a}$  et donc  $\mathcal{O}'_{Y'_a} \in [\mathcal{O}_{Y'_a}]$ . ■

### 2.2.2 Contraction d'un arc dans un graphe orienté acyclique

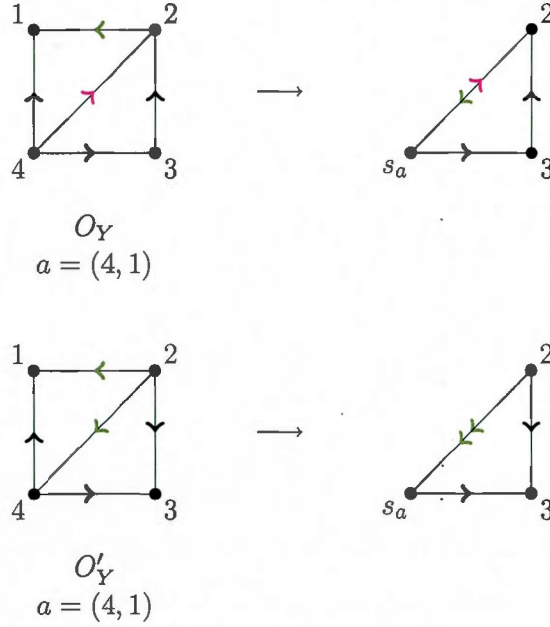
Rappelons que nous avons défini dans le premier chapitre le graphe  $Y''_a$  obtenu en contractant l'arête  $a$  du graphe non orienté  $Y$ . Notons que dans la suite de ce mémoire, nous étudions spécifiquement le cas où l'arête  $a$  est contenue dans un cycle de  $Y$ . Contrairement à la contraction d'une arête d'un graphe non orienté, la contraction d'un arc d'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  d'un graphe  $Y$  n'est pas toujours possible. En effet, comme le montre la Figure 2.6, la contraction de l'arc  $(4, 1)$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  ferait en sorte que la nouvelle arête  $\{s_a, 2\} \in A_{Y''_a}$  - où le sommet  $s_a$  est le nouveau sommet résultant de la fusion des sommets 1 et 4 - aurait deux orientations possibles puisque les arêtes  $\{1, 2\}$  et  $\{4, 2\}$  sont orientées en sens contraire par rapport aux sommets 1 et 4. Par contre, la contraction de l'arc  $(4, 1)$  serait possible dans l'orientation  $\mathcal{O}'_Y$  étant donné qu'il n'y a aucune confusion pour l'orientation de la nouvelle arête  $\{s_a, 2\} \in A_{Y''_a}$ . Une telle orientation est dite  $(4, 1)$ -contractile.

**Définition 4.** Soit  $Y$  un graphe et  $a = \{v, w\} \in A_Y$ . Une orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  est dite  $a$ -contractile si pour tout sommet  $u \in S_Y$  tel que  $\{u, v\}, \{u, w\} \in A_Y$  nous avons

$$\mathcal{O}_Y(\{u, v\}) = (u, v) \iff \mathcal{O}_Y(\{u, w\}) = (u, w)$$

On note  $\mathcal{O}r_a(Y)$  l'ensemble des orientations  $a$ -contractiles du graphe  $Y$ .

*Remarque 11.* Ceci est équivalent à dire que si  $\mathcal{O}_Y(\{u, v\}) = (v, u)$  alors  $\mathcal{O}_Y(\{u, w\}) = (w, u)$  pour tout  $u \in S_Y$  tel que  $\{u, v\}, \{u, w\} \in A_Y$ .



**Figure 2.6** L'orientation  $O_Y$  n'est pas  $(4,1)$ -contractile contrairement à  $O'_Y$ .

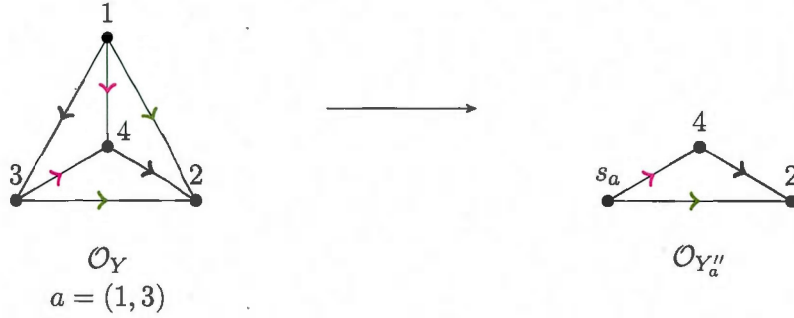
Par exemple, dans la Figure 2.6, l'orientation  $O_Y$  n'est pas  $(4, 1)$ -contractile puisque  $O_Y(\{1, 2\}) = (2, 1)$  mais  $O_Y(\{2, 4\}) \neq (2, 4)$ .

Ainsi, il est possible de contracter un arc  $a = (u, v)$  d'une orientation  $O_Y$  seulement si cette dernière est  $a$ -contractile. Les sommets  $u$  et  $v$  de l'arc  $a$  sont alors fusionnés en le nouveau sommet noté  $s_a$  et l'orientation des arêtes du graphes  $Y_a''$  sont orientées à partir de l'orientation  $O_Y$ . Nous définissons la fonction de contraction  $C_a$  d'un arc  $a$  de  $O_Y$  comme suit :

$$C_a: Or_a(Y) \rightarrow Or(Y_a'')$$

$$O_Y \mapsto C_a(O_Y) = O_{Y_a''}$$





**Figure 2.7** Contraction de l'arc  $(1,3)$  de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ .

tel que pour  $b$  une arête de  $Y''_a$  nous avons

$$\mathcal{O}_{Y''_a}(b) = \begin{cases} \mathcal{O}_Y(b) & \text{si } s_a \notin b \\ (x, s_a) & \text{si } \mathcal{O}_Y(\{x, v\}) = (x, v) \text{ ou } \mathcal{O}_Y(\{x, w\}) = (x, w) \\ (s_a, x) & \text{si } \mathcal{O}_Y(\{x, v\}) = (v, x) \text{ ou } \mathcal{O}_Y(\{x, w\}) = (w, x) \end{cases}$$

**Exemple 2.** La Figure 2.7 représente une orientation  $\mathcal{O}_Y$  qui est  $(1,3)$ -contractile et dont l'orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  obtenue en contractant l'arc  $(1,3)$  est définie comme suit :

$$\mathcal{O}_{Y''_a}(\{4, 2\}) = (4, 2) \text{ car } s_a \notin \{4, 2\}$$

$$\mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 4\}) = (s_a, 4) \text{ car } \mathcal{O}_Y(\{4, 1\}) = (1, 4) \text{ et } \mathcal{O}_Y(\{4, 3\}) = (3, 4)$$

$$\mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 2\}) = (s_a, 2) \text{ car } \mathcal{O}_Y(\{2, 1\}) = (1, 2) \text{ et } \mathcal{O}_Y(\{2, 3\}) = (3, 2)$$

Contrairement à la suppression d'arc, la contraction d'un arc d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  ne résulte pas nécessairement en une orientation acyclique de  $Y''_a$ , voir Figure 2.9. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'orientation résultant de la contraction d'un arc d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  soit acyclique.

**Théorème 1.** Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a = \{v, w\}$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation de  $Y$ . Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i)  $\mathcal{O}_Y$  est acyclique et ne contient aucun chemin orienté de longueur plus grande que 1 de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$  ;
- (ii)  $\mathcal{O}_Y$  est  $a$ -contractile et acyclique et ne contient aucun chemin orienté de longueur plus grande que 1 de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$  ;
- (iii)  $\mathcal{O}_Y$  est  $a$ -contractile et  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$  est acyclique.

*Démonstration.* Montrons d'abord que (i) implique (ii). Soit  $\mathcal{O}_Y$  une orientation acyclique ne contenant aucun chemin orienté de longueur plus grande que 1 de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$  et montrons que  $\mathcal{O}_Y$  est  $a$ -contractile. Supposons que  $\mathcal{O}_Y$  n'est pas  $a$ -contractile. Il existe alors un sommet  $u$  de  $Y$  tel que  $\{u, v\}$  et  $\{u, w\}$  sont des arêtes de  $Y$  orientées de sens contraire par rapport à  $u$ , c'est-à-dire, tel que  $\mathcal{O}_Y(\{u, v\}) = (u, v)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{u, w\}) = (w, u)$ , ou alors  $\mathcal{O}_Y(\{u, v\}) = (v, u)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{u, w\}) = (u, w)$ . Dans le premier cas,  $P = (w, u, v)$  est un chemin orienté de longueur 2 de  $w$  vers  $v$  dans  $\mathcal{O}_Y$  et dans l'autre cas,  $P' = (v, u, w)$  est un chemin orienté de longueur 2 de  $v$  vers  $w$  dans  $\mathcal{O}_Y$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $\mathcal{O}_Y$  ne contient pas de chemin orienté de longueur plus grande que 1 et par conséquent,  $\mathcal{O}_Y$  est  $a$ -contractile.

Montrons maintenant que (ii) implique (iii). Supposons que  $\mathcal{O}_Y$  ne contient aucun chemin orienté de longueur plus grande que 1 de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$  et que  $\mathcal{O}_Y$  est  $a$ -contractile. Posons donc  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y_a''}$  et montrons que  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  est acyclique. D'abord, comme  $\mathcal{O}_Y$  est acyclique,  $\mathcal{O}_Y$  ne contient aucun cycle. En particulier, elle ne contient aucun cycle contenant seulement des sommets différents de  $v$  et de  $w$ . Par conséquent,  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  ne contient aucun cycle contenant seulement des sommets différents de  $s_a$ . De plus,  $\mathcal{O}_Y$  ne contient aucun chemin orienté de la forme  $(v, s_1, \dots, s_k, w)$  ou  $(w, s_1, \dots, s_k, v)$  où les  $s_i$  sont à la fois des sommets de  $Y$  et de  $Y_a''$ . En particulier,  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  ne contient aucun chemin orienté de la forme  $(s_a, s_1, \dots, s_k, s_a)$ . Autrement dit,  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  ne contient aucun cycle contenant  $s_a$ . Ainsi,  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  ne contient aucun cycle et est donc acyclique.

Finalement, montrons que (iii) implique (i) en montrant la contraposée. Montrons donc que si  $\mathcal{O}_Y$  est cyclique ou si  $\mathcal{O}_Y$  contient au moins un chemin orienté de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$  de longueur plus grande que 1, alors  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$  est cyclique ou  $\mathcal{O}_Y$

n'est pas  $a$ -contractile. D'abord, supposons que  $\mathcal{O}_Y$  est cyclique et notons donc  $C = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$  un cycle de  $\mathcal{O}_Y$ , où  $s_i \in S_Y$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Supposons aussi sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$ . Nous devons montrer que  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$  est cyclique. L'ensemble des sommets du graphe  $Y_a''$  est l'ensemble  $S_{Y_a''} = S_Y \setminus \{v, w\} \cup s_a$  où  $s_a$  est le nouveau sommet créé par la fusion des sommets  $v$  et  $w$  du graphe  $Y$ . Nous devons alors considérer les 4 cas possibles : (1)  $C \cap \{v, w\} = \emptyset$ ; (2)  $v \in C$  et  $w \notin C$ ; (3)  $v \notin C$  et  $w \in C$ ; (4)  $v, w \in C$ .

- (1) Supposons que  $C = (s_1, s_2, \dots, s_n) \cap \{v, w\} = \emptyset$ . Dans ce cas, tous les sommets  $s_i$  du cycle  $C$  sont aussi des sommets de  $Y_a''$ . Par conséquent  $C$  est aussi un cycle dans l'orientation  $\mathcal{O}_{Y_a''}$ , d'où  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  est cyclique.
- (2) Supposons que  $v \in C$  et  $w \notin C$  et notons  $C = (s_1, \dots, s_i, v, s_j, \dots, s_n)$ . En particulier,  $\mathcal{O}_Y(\{s_i, v\}) = (s_i, v)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{s_j, v\}) = (v, s_j)$ . Par définition de contraction, le sommet  $v \in S_Y$  est remplacé par le sommet  $s_a \in S_{Y_a''}$  et celui-ci est adjacent à tous les anciens voisins de  $v$ . Ainsi,  $C' = (s_1, \dots, s_i, s_a, s_j, \dots, s_n)$  est un cycle de  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  puisque par définition de la fonction de contraction nous avons

$$\mathcal{O}_{Y_a''}(\{s_i, s_a\}) = (s_i, s_a), \mathcal{O}_{Y_a''}(\{s_a, s_j\}) = (s_a, s_j)$$

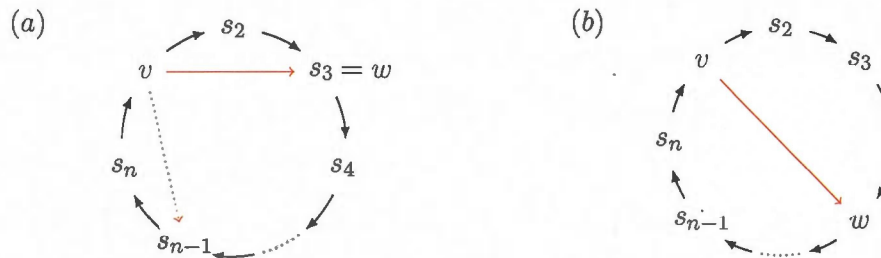
car  $\mathcal{O}_Y(\{s_i, v\}) = (s_i, v)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{s_j, v\}) = (v, s_j)$  puis

$$\mathcal{O}_{Y_a''}(\{s_i, s_{i+1}\}) = \mathcal{O}_Y(\{s_i, s_{i+1}\}) = (s_i, s_{i+1})$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi,  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  est cyclique.

- (3) Le cas  $v \notin C$  et  $w \in C$  est analogue au cas (2).
- (4) Supposons finalement que  $v, w \in C = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$ . Supposons aussi sans perte de généralité que  $v = s_1$ , c'est-à-dire,  $C = (v, s_2, \dots, s_n, v)$ , et analysons deux cas :  $w$  et  $v$  sont consécutifs dans  $C$  et  $w$  et  $v$  ne sont pas consécutifs dans  $C$ . Dans le premier cas, comme  $w$  et  $v = s_1$  sont consécutifs dans  $C$ , alors  $w = s_2$  ou  $w = s_n$ . Supposons sans perte de généralité que  $w = s_2$ . Si  $n = 3$ , alors les arêtes  $\{w, s_3\}$  et  $\{v, s_3\}$  sont orientées  $(w, s_3)$  et  $(s_3, v)$  dans  $\mathcal{O}_Y$ . Alors,  $\mathcal{O}_Y$  n'est pas  $a$ -contractile. Supposons que  $n > 3$ . Après contraction, nous obtenons le cycle  $(s_a, s_2, \dots, s, s_a)$  dans l'orientation  $\mathcal{O}_{Y_a''}$ , d'où  $\mathcal{O}_{Y_a''}$  est cyclique.





**Figure 2.8** Cycle de  $\mathcal{O}_Y = r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''})$  contenant  $v$  et  $w$  où  $v$  et  $w$  ne sont pas consécutifs.

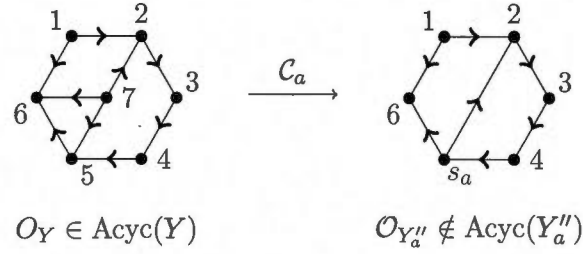
Dans le deuxième cas, comme  $w$  et  $v$  ne sont pas consécutifs dans  $C$  et puisque  $v = s_1$ , nous avons  $w = s_i$  pour  $3 \leq i < n$ , voir Figure 2.8. Si  $i = 3$  ou  $i = n - 1$ , alors  $\mathcal{O}_Y$  n'est pas  $a$ -contractile. En effet, supposons sans perte de généralité que  $i = 3$ , l'autre cas étant symétrique. Nous aurions alors dans  $\mathcal{O}_Y$  les orientations d'arêtes  $(v, s_2)$  et  $(s_2, w)$ , ce qui montre que  $\mathcal{O}_Y$  n'est pas  $a$ -contractile. Supposons maintenant que  $w = s_i$  pour  $4 \leq i < n - 2$ . Nous avons alors par le même argument qu'en (2) que  $\mathcal{O}_{Y''}$  est cyclique car  $C' = (s_a, s_2, \dots, s_{i-1}, s_a)$  est un cycle de  $\mathcal{O}_{Y''}$ .

D'autre part, supposons sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_Y$  contient un chemin orienté de  $v$  vers  $w$  de longueur plus grande que 1. Notons donc  $C = (v, s_1, \dots, s_k, w)$  ce chemin. Après contraction, nous obtenons le cycle  $(s_a, s_1, \dots, s_k, s_a)$  dans l'orientation  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$ , d'où  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$  est cyclique. Ainsi, nous avons bien que (iii) implique (i), ce qui conclut la démonstration.

■

## 2.3 Dénombrement des $\kappa$ -classes d'équivalence

Le problème qui nous intéresse dans ce mémoire est le suivant : soit  $Y$  un graphe donné, combien de  $\kappa$ -classes d'équivalence y a-t-il ? À ce jour, aucune formule close n'a encore été proposée afin de calculer le nombre de  $\kappa$ -classes d'équivalence pour un graphe quelconque  $Y$ . Toutefois, nous présentons dans cette section une formule récursive pour

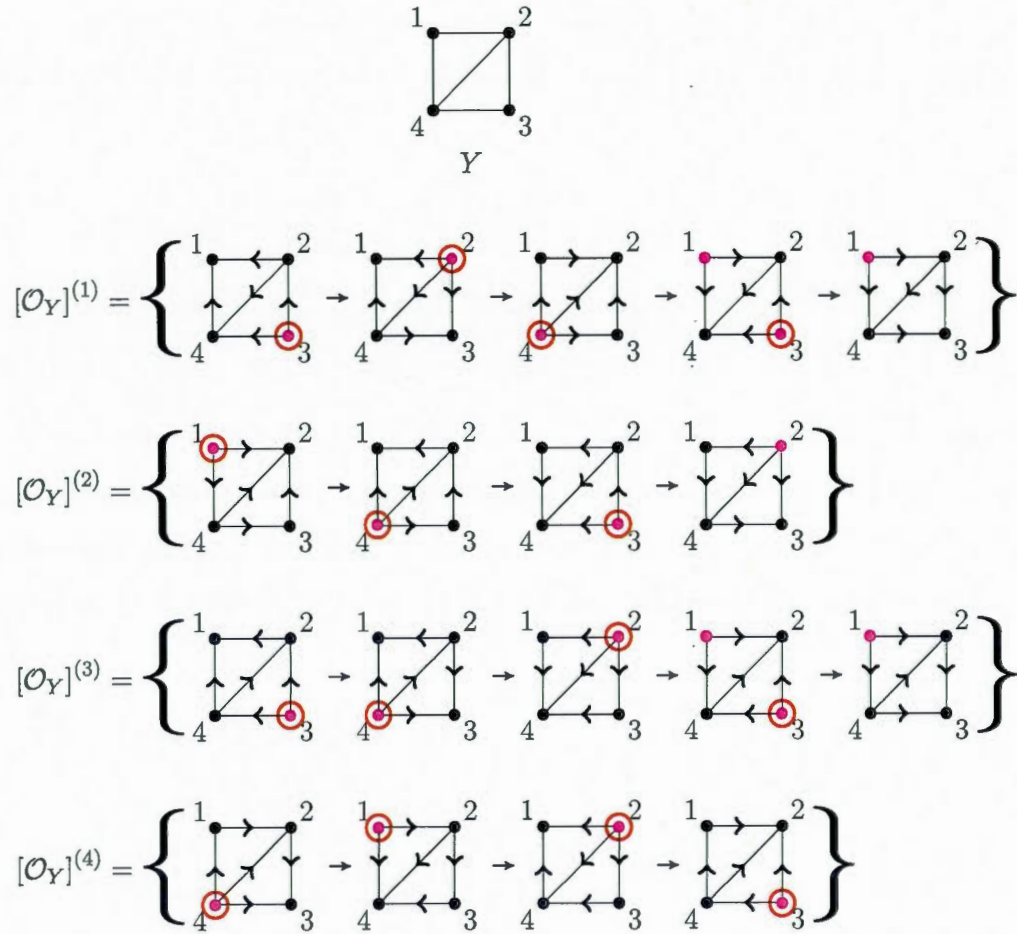


**Figure 2.9** En contractant l'arc  $a = (7, 5)$  de l'orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$ , nous obtenons l'orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ . Cette orientation n'est pas acyclique puisqu'elle contient le cycle  $(s_a, 2, 3, 4, s_a)$ .

$\kappa(Y)$ , originellement énoncée par Macauley et Mortveit dans leur article *On Enumeration of Conjugacy Classes of Coxeter Elements* (Macauley et Mortveit, 2008). Cette formule récursive est à première vue très semblable au polynôme de Tutte, bien connu en théorie des graphes. Nous voyons dans le dernier chapitre de ce mémoire que nous retrouvons effectivement ce nombre  $\kappa(Y)$  à partir du polynôme de Tutte.

### 2.3.1 Formule de récurrence pour $\kappa(Y)$

Dénombrer les  $\kappa$ -classes d'équivalence d'un graphe en regroupant manuellement ses orientations acycliques dans leurs classes d'équivalence respectives peut s'avérer être une tâche laborieuse. Prenons par exemple le graphe  $Y$  à 4 sommets représenté à la Figure 2.10. Ce graphe compte 5 arêtes, d'où 32 orientations parmi lesquelles 18 sont acycliques. Afin de déterminer le nombre  $\kappa(Y)$  des  $\kappa$ -classes d'équivalence de ce graphe, nous devons trier ces 18 orientations acycliques dans leurs classes d'équivalence respectives. Pour ce faire, nous commençons par effectuer un clic sur une première orientation acyclique, qui donnera alors une seconde orientation acyclique contenue dans la même classe d'équivalence que la première. Nous procédons de même sur cette nouvelle orientation, et ainsi de suite. La Figure 2.10 représente les 4  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$  ainsi obtenues.



**Figure 2.10** Liste des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$ . Les sources des orientations acycliques sont indiquées par les sommets roses tandis que les sommets encerclés indiquent les sources cliquées pour passer d'une orientation à la suivante dans chaque liste.

La formule de récurrence énoncée dans le théorème suivant permet cependant de dénombrer les  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$  à partir des graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  dont l'arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$  a respectivement été supprimée et contractée.

**Théorème 2.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ .*

*Alors*

(i)  $\kappa(Y) = 1$  si  $Y$  est une forêt;

(ii)  $\kappa(Y) = \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a)$ .

Avant de débiter la démonstration de ce théorème, voici un exemple de calcul de  $\kappa(Y)$  à partir de la formule de récurrence énoncée dans ce théorème.

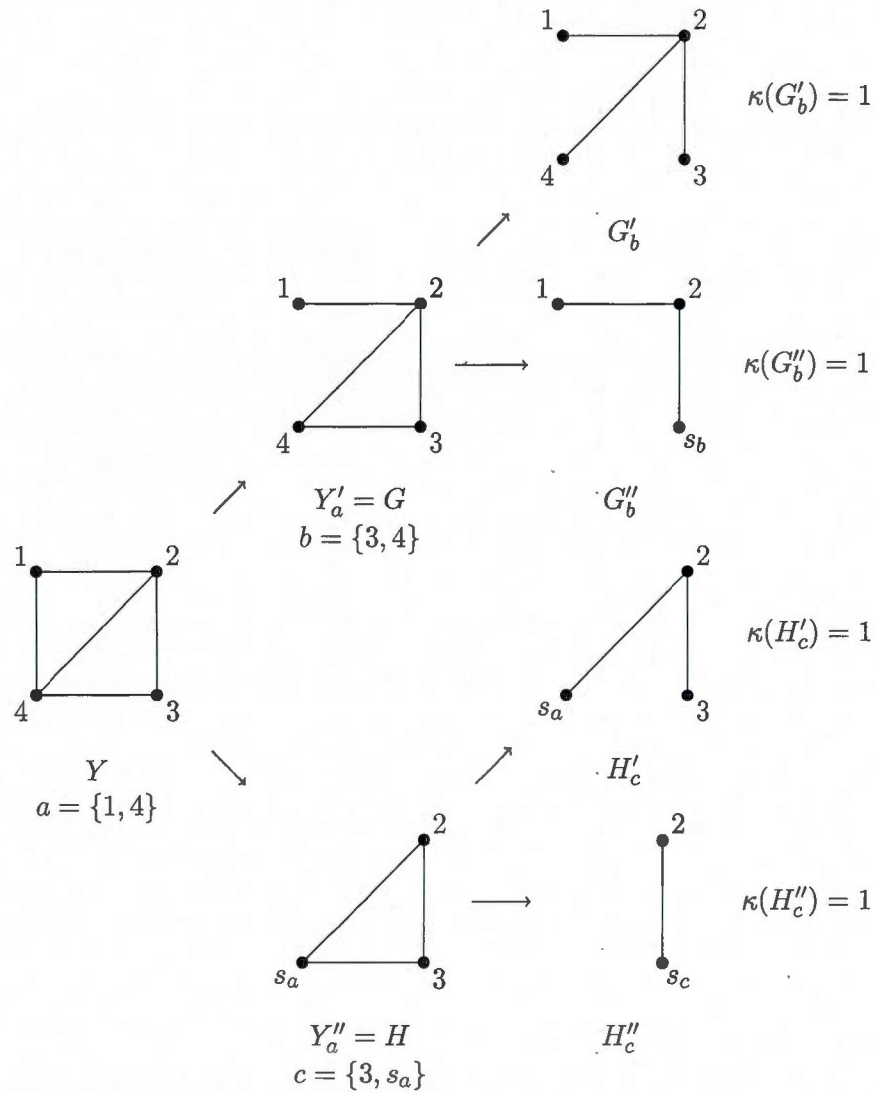
**Exemple 3.** La Figure 2.11 illustre les graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  obtenus en supprimant et contractant l'arête  $\{1, 4\}$  contenue dans un cycle du graphe  $Y$ . Nous obtenons en répétant ce procédé les graphes  $G'_b$  et  $G''_b$  à partir de  $Y'_a$  et les graphes  $H'_c$  et  $H''_c$  à partir de  $Y''_a$ . Comme les graphes  $G'_b, G''_b, H'_c$  et  $H''_c$  sont des arbres, alors

$$\kappa(G'_b) = \kappa(G''_b) = \kappa(H'_c) = \kappa(H''_c) = 1$$

d'où

$$\begin{aligned} \kappa(Y) &= \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a) \\ &= \kappa(G'_b) + \kappa(G''_b) + \kappa(H'_c) + \kappa(H''_c) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Nous étudions à la section suivante les clics sur les orientations acycliques d'un graphe non connexe. Cette étude nous permet de démontrer dans la section 2.3.3 que les ponts d'un graphe  $Y$ , c'est-à-dire les arêtes non contenues dans un cycle du graphe, ne contribuent pas lors du calcul de  $\kappa(Y)$ . Cette propriété suffit pour montrer que  $\kappa(Y) = 1$  si  $Y$  est une forêt. Nous donnons ensuite le plan de la démonstration de la deuxième partie du théorème. Cette deuxième partie prend en considération le rôle joué par les arêtes contenues dans un cycle du graphe  $Y$ . À cette fin, nous introduisons dans la



**Figure 2.11** Graphes obtenus en supprimant et contractant l'arête  $\{1, 4\}$  contenue dans un cycle du graphe  $Y$  ainsi que les graphes obtenus en répétant ce procédé sur les graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$ .



section 2.3.4 le *graphe effondré*  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et d'une arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$ . Nous approfondissons l'étude de ce graphe dans le chapitre suivant, ce qui nous amènera à compléter la preuve du Théorème 2.

### 2.3.2 Clic et composantes connexes

Nous étudions dans cette section le comportement de la relation de clic sur une orientation d'un graphe comprenant deux composantes connexes. Le cas général d'un graphe à plusieurs composantes connexes est analogue.

Soit  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  le graphe composé des deux graphes disjoints  $Y_1$  et  $Y_2$ . En particulier, nous avons  $A_Y = A_{Y_1 \sqcup Y_2} = A_{Y_1} \sqcup A_{Y_2}$  et  $S_Y = S_{Y_1 \sqcup Y_2} = S_{Y_1} \sqcup S_{Y_2}$ . Ainsi, une orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y: A_Y \rightarrow S_Y \times S_Y$  est aussi composée de deux orientations acycliques disjointes :  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2}$ . Montrons maintenant que deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  du graphe  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  sont clic-équivalentes si et seulement si leurs sous-orientations respectives  $\mathcal{O}_{Y_1}, \mathcal{O}_{Y_2}$  et  $\mathcal{O}'_{Y_1}, \mathcal{O}'_{Y_2}$  le sont respectivement aussi.

**Proposition 11.** *Soit  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  le graphe composé des deux graphes disjoints  $Y_1$  et  $Y_2$ . Soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y$  deux orientations acycliques de  $Y$ . Alors*

$$\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y \iff \mathcal{O}_{Y_1} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_1} \text{ et } \mathcal{O}_{Y_2} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_2}$$

où  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2}$  et  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}'_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}'_{Y_2}$ .

*Démonstration.* Soit  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  et  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y \in \text{Acyc}(Y)$  telles que  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2}$  et  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}'_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}'_{Y_2}$ . Soit  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$ . Il existe donc une suite de clics  $cl = cl_{s_1} cl_{s_2} \dots cl_{s_k}$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Par récurrence, il suffit de considérer le cas  $k = 1$  puisque la relation de clic est transitive. Soit donc  $cl = cl_{s_1}$ . Comme les sous-graphes  $Y_1$  et  $Y_2$  sont disjoints, les ensembles de leurs sommets  $S_{Y_1}$  et  $S_{Y_2}$  sont disjoints. Ainsi,  $cl_{s_1}$  est soit un clic sur  $\mathcal{O}_{Y_1}$ , soit un clic sur  $\mathcal{O}_{Y_2}$ . En supposant sans perte de généralité que  $s_1 \in S_{Y_1}$ , nous avons donc  $cl_{s_1}(\mathcal{O}_{Y_1}) = \mathcal{O}'_{Y_1}$  et par conséquent  $\mathcal{O}_{Y_1} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_1}$ . De plus,  $\mathcal{O}'_{Y_2} = cl_{s_1}(\mathcal{O}_{Y_2}) = \mathcal{O}_{Y_2}$  puisque  $s_1 \notin S_{Y_2}$ . Or,  $\mathcal{O}_{Y_2} \sim_\kappa \mathcal{O}_{Y_2}$  par réflexivité de la relation de clic et donc  $\mathcal{O}_{Y_2} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_2}$ . D'où le résultat.

Réciproquement, soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y \in \text{Acyc}(Y)$  telles que  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2}$  et  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}'_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}'_{Y_2}$ . Si  $\mathcal{O}_{Y_1} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_1}$  et  $\mathcal{O}_{Y_2} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_2}$ , alors il existe  $cl^{(1)}, cl^{(2)}$  deux suites de clics telles que  $cl^{(1)}(\mathcal{O}_{Y_1}) = \mathcal{O}'_{Y_1}$  et  $cl^{(2)}(\mathcal{O}_{Y_2}) = \mathcal{O}'_{Y_2}$ . Comme  $Y_1$  et  $Y_2$  sont disjoints, tout clic de  $cl^{(1)}$  n'inverse l'orientation d'aucun arc de  $\mathcal{O}_{Y_2}$  et vice versa. Ainsi,  $cl = cl^{(2)} \circ cl^{(1)}$  est une suite de clics sur  $\mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2} = \mathcal{O}_Y$  telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}'_{Y_2} = \mathcal{O}'_Y$ . D'où  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$ . ■

### 2.3.3 Rôle des ponts

Nous montrons dans la Proposition 12 que les ponts ne contribuent pas lors du calcul de  $\kappa(Y)$ . Pour ce faire, nous montrons d'abord le Lemme 1 qui stipule que si deux orientations acycliques d'un graphe  $Y$  diffèrent seulement par l'orientation d'un pont, alors ces deux orientations sont contenues dans une même  $\kappa$ -classe de  $Y$ .

**Lemme 1.** *Soit  $Y = Y_1 \cup \{\{u, v\}\} \cup Y_2$  le graphe composé de l'union des sous-graphes propres  $Y_1$  et  $Y_2$  reliés par le pont  $\{u, v\}$ , où  $u \in S_{Y_1}$  et  $v \in S_{Y_2}$ .*

*Soit  $\mathcal{O}_{(u,v)} = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(u, v)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  une orientation acyclique de  $Y$  telle que le pont  $\{u, v\}$  soit orienté  $(u, v)$  et où  $\mathcal{O}_{Y_1}, \mathcal{O}_{Y_2}$  sont respectivement des orientations acycliques des graphes  $Y_1$  et  $Y_2$ . Soit  $\mathcal{O}_{(v,u)} = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(v, u)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  une orientation acyclique de  $Y$  définie de manière analogue. Alors*

$$[\mathcal{O}_{(u,v)}] = [\mathcal{O}_{(v,u)}]$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_{(u,v)} = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(u, v)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  une orientation acyclique du graphe  $Y = Y_1 \cup \{\{u, v\}\} \cup Y_2$  telle que le pont  $\{u, v\}$  est orienté  $(u, v)$ . Par la Proposition 6, il existe une suite de clics simple complète  $cl$  sur les sommets de  $Y_1$  telle que  $cl(\mathcal{O}_{Y_1}) = \mathcal{O}_{Y_1}$ . Montrons que  $cl(\mathcal{O}_{(u,v)}) = \mathcal{O}_{(v,u)}$ . Tout d'abord, comme  $cl$  ne contient aucun sommet de  $Y_2$ , aucun arc de  $\mathcal{O}_{Y_2}$  n'est inversé. D'où  $cl(\mathcal{O}_{Y_2}) = \mathcal{O}_{Y_2}$ . De plus, comme  $u \in S_{Y_1}$ ,  $u$  est cliqué exactement une fois dans la suite de clics  $cl$  et par conséquent  $cl(\mathcal{O}_{(u,v)})(\{u, v\}) = (v, u)$ . Ainsi, nous avons bien  $cl(\mathcal{O}_{(u,v)}) = \mathcal{O}_{(v,u)}$  et donc  $\mathcal{O}_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}_{(v,u)}$ . D'où  $[\mathcal{O}_{(u,v)}] = [\mathcal{O}_{(v,u)}]$ . ■



**Proposition 12.** Soit  $Y$  un graphe, nous avons que

- (i) Si  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  alors  $\kappa(Y) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)$  ;
- (ii) Si  $a$  est un pont de  $Y$  alors il existe deux sous-graphes propres  $Y_1$  et  $Y_2$  du graphe  $Y$  tels que  $Y'_a = Y_1 \sqcup Y_2$  et  $\kappa(Y) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2) = \kappa(Y'_a)$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $Y = Y_1 \sqcup Y_2$  et définissons la fonction  $f$  comme suit :

$$f: \text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa \rightarrow \text{Acyc}(Y_1)/\sim_\kappa \times \text{Acyc}(Y_2)/\sim_\kappa$$

$$[\mathcal{O}_Y] \mapsto ([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}])$$

où  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2} \in \text{Acyc}(Y)$ . En vertu de la Proposition 11, cette fonction est bien définie. Montrons que cette fonction est bijective.

D'abord, soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y \in \text{Acyc}(Y)$  telles que

$$f([\mathcal{O}_Y]) = f([\mathcal{O}'_Y]) = ([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}]).$$

Nous avons donc par définition de  $f$  que  $[\mathcal{O}_{Y_1}] = [\mathcal{O}'_{Y_1}]$  et  $[\mathcal{O}_{Y_2}] = [\mathcal{O}'_{Y_2}]$ . Mais alors  $\mathcal{O}_{Y_1} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_1}$  et  $\mathcal{O}_{Y_2} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{Y_2}$  et donc  $\mathcal{O}_Y \sim_\kappa \mathcal{O}'_Y$  par la Proposition 11. Par conséquent  $[\mathcal{O}_Y] \neq [\mathcal{O}'_Y]$  et donc  $f$  est injective.

Soit  $([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}]) \in \text{Acyc}(Y_1)/\sim_\kappa \times \text{Acyc}(Y_2)/\sim_\kappa$ . Alors  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}_{Y_2}$  est une orientation acyclique de  $Y$ . De plus, par la Proposition 11, pour toute orientation  $\mathcal{O}'_{Y_1} \in [\mathcal{O}_{Y_1}]$  et toute orientation  $\mathcal{O}'_{Y_2} \in [\mathcal{O}_{Y_2}]$  nous avons que  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}'_{Y_1} \sqcup \mathcal{O}'_{Y_2}$  est  $\kappa$ -équivalente à  $\mathcal{O}_Y$ . D'où  $([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}]) = f([\mathcal{O}_Y])$  et donc  $f$  est surjective.

Ainsi,  $f$  est bijective et donc

$$\begin{aligned} \kappa(Y) &= |\text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa| = |\text{Acyc}(Y_1)/\sim_\kappa| \times |\text{Acyc}(Y_2)/\sim_\kappa| \\ &= \kappa(Y_1)\kappa(Y_2). \end{aligned}$$

- (ii) Soit  $Y$  un graphe et  $a = \{u, v\} \in A_Y$  un pont de  $Y$ . Notons alors  $Y = Y_1 \cup \{\{u, v\}\} \cup Y_2$  où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux sous-graphes propres de  $Y$ . Ainsi, nous avons  $Y'_a = Y_1 \sqcup Y_2$  et donc  $\kappa(Y'_a) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)$  par la première partie de la Proposition 12. Montrons que  $\kappa(Y) = \kappa(Y'_a)$ , c'est-à-dire, que  $\kappa(Y) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)$ . Nous

définissons de manière analogue à la première partie de la démonstration la fonction  $f'$  suivante :

$$f' : \text{Acyc}(Y) / \sim_\kappa \rightarrow \text{Acyc}(Y_1) / \sim_\kappa \times \text{Acyc}(Y_2) / \sim_\kappa$$

$$[\mathcal{O}_{(u,v)}] \mapsto ([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}])$$

où  $\mathcal{O}_{(u,v)} = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(u, v)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$ . Nous savons par le Lemme 1 que pour toute paire d'orientations  $\mathcal{O}_{(u,v)}$  et  $\mathcal{O}_{(v,u)}$  nous avons  $[\mathcal{O}_{(u,v)}] = [\mathcal{O}_{(v,u)}]$ . De ce fait et par la Proposition 11, cette fonction est bien définie. Montrons que  $f'$  est bijective.

Soit  $\mathcal{O}_{(u,v)}, \mathcal{O}'_{(u,v)} \in \text{Acyc}(Y)$  telles que  $f'([\mathcal{O}_{(u,v)}]) = f'([\mathcal{O}'_{(u,v)}]) = ([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}])$ . Par définition de  $f'$ , nous avons que  $[\mathcal{O}_{Y_1}] = [\mathcal{O}'_{Y_1}]$  et  $[\mathcal{O}_{Y_2}] = [\mathcal{O}'_{Y_2}]$ . Il existe donc  $cl^{(1)}$  et  $cl^{(2)}$  deux suites de clics telles que  $cl^{(1)}(\mathcal{O}_{Y_1}) = \mathcal{O}'_{Y_1}$  et  $cl^{(2)}(\mathcal{O}_{Y_2}) = \mathcal{O}'_{Y_2}$ . D'où

$$cl^{(2)} \circ cl^{(1)}(\mathcal{O}_{(u,v)}) = \mathcal{O}'_{(u,v)} \text{ ou } \mathcal{O}'_{(v,u)} \text{ et}$$

$$\mathcal{O}_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{(u,v)} \text{ ou } \mathcal{O}_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{(v,u)}.$$

Or,  $\mathcal{O}'_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{(v,u)}$  par le Lemme 1 donc  $\mathcal{O}_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{(u,v)}$ . Ainsi, nous avons  $[\mathcal{O}_{(u,v)}] = [\mathcal{O}'_{(u,v)}]$ , d'où  $f'$  est injective. Soit  $([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}]) \in \text{Acyc}(Y_1) / \sim_\kappa \times \text{Acyc}(Y_2) / \sim_\kappa$ . Alors  $\mathcal{O}_{(u,v)} = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(u, v)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  est une orientation acyclique de  $Y$ . De plus, pour toute orientation  $\mathcal{O}'_{Y_1} \in [\mathcal{O}_{Y_1}]$  et  $\mathcal{O}'_{Y_2} \in [\mathcal{O}_{Y_2}]$ , l'orientation  $\mathcal{O}'_{(u,v)} = \mathcal{O}'_{Y_1} \cup \{(u, v)\} \cup \mathcal{O}'_{Y_2}$  est  $\kappa$ -équivalente à  $\mathcal{O}_{(u,v)}$ . En effet, il existe  $cl^{(1)}$  et  $cl^{(2)}$  deux suites de clics telles que  $cl^{(1)}(\mathcal{O}_{Y_1}) = \mathcal{O}'_{Y_1}$  et  $cl^{(2)}(\mathcal{O}_{Y_2}) = \mathcal{O}'_{Y_2}$ . Ainsi,  $cl^{(2)} \circ cl^{(1)}(\mathcal{O}_{(u,v)}) = \mathcal{O}'_{(u,v)} \text{ ou } \mathcal{O}'_{(v,u)}$ . Or, par le Lemme 1,  $\mathcal{O}'_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}'_{(v,u)}$ , d'où  $\mathcal{O}'_{(u,v)} \sim_\kappa \mathcal{O}_{(u,v)}$ . Ainsi  $([\mathcal{O}_{Y_1}], [\mathcal{O}_{Y_2}]) = f'([\mathcal{O}_{(u,v)}])$  et donc  $f'$  est surjective. Comme  $f'$  est bijective, nous avons bien  $\kappa(Y) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)$ .

■

La Proposition 12 stipule en particulier que si un graphe  $Y$  est l'union disjointe de deux graphes  $Y_1$  et  $Y_2$  alors  $\kappa(Y) = \kappa(Y_1)\kappa(Y_2)$ . Nous supposons donc, sans perte de généralité, que le graphe  $Y$  est connexe dans la suite de ce mémoire.

### 2.3.4 Un aperçu du graphe effondré

Comme mentionné auparavant, nous construisons dans le prochain chapitre le *graphe effondré*  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$ . Le théorème suivant énonce les propriétés de ce graphe nous permettant de démontrer la deuxième partie du Théorème 2.

**Théorème 3.** *Soit  $Y$  un graphe et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Il existe un graphe  $\mathcal{E}_a(Y)$  ayant comme ensemble de sommets les  $\kappa$ -classes d'équivalence de  $Y$  et tel que*

- (i)  $\mathcal{E}_a(Y)$  est isomorphe à un ensemble disjoint de graphes linéaires ;
- (ii) L'ensemble des arêtes de  $\mathcal{E}_a(Y)$  est en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes de  $Y_a''$  ;
- (iii) L'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E}_a(Y)$  est en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes de  $Y_a'$ .

On appelle  $\mathcal{E}_a(Y)$  le graphe effondré du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$ .

*Remarque 12.* Le deuxième point du Théorème 3 implique que  $\kappa(Y_a'') = |A_{\mathcal{E}_a(Y)}|$  et le troisième point que  $\kappa(Y_a') = |CC(\mathcal{E}_a(Y))|$ , où  $CC(\mathcal{E}_a(Y))$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{E}_a(Y)$ .

La démonstration de ce théorème est le sujet du chapitre suivant. Nous terminons maintenant ce chapitre en démontrant le Théorème 2.

*Démonstration du Théorème 2.*

- (i) Nous avons vu à la Proposition 12 que les ponts ne contribuent pas lors du calcul de  $\kappa(Y)$ . Définissons le *graphe cyclique*  $Cycle(Y)$  du graphe  $Y$  comme le graphe obtenu en supprimant tous les ponts de  $Y$ . Le graphe  $Cycle(Y)$  possède donc le même nombre de  $\kappa$ -classes d'équivalence que  $Y$ , c'est-à-dire  $\kappa(Y) = \kappa(Cycle(Y))$ . Or, si  $Y$  est une forêt, toutes ses arêtes sont des ponts. Ainsi,  $A_{Cycle(Y)} = \emptyset$ . Il existe alors une unique orientation sur  $Cycle(Y)$ , soit l'orientation triviale, qui est acyclique. Par conséquent,  $|Acyc(Cycle(Y))| = 1$  et alors  $\kappa(Y) = \kappa(Cycle(Y)) = 1$ .

(ii) Soit  $c_1, c_2, \dots, c_n$  les composantes connexes du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Nous avons alors  $\kappa(Y'_a) = n$  par la troisième propriété du Théorème 3. De plus, si  $|S_{c_i}|$  est le nombre de sommets de la composante  $c_i$ , alors  $\sum_{i=1}^n |S_{c_i}| = \kappa(Y)$  puisque l'ensemble des sommets de  $\mathcal{E}_a(Y)$  est composé des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$ .

Si une composante connexe  $c_i$  contient  $m$  sommets, alors elle contient  $m - 1$  arêtes car  $\mathcal{E}_a(Y)$  est isomorphe à un ensemble de graphes linéaires disjoints. Ainsi nous avons par la deuxième propriété du graphe effondré que  $\kappa(Y''_a) = \sum_{i=1}^n (|S_{c_i}| - 1)$ .

D'où

$$\begin{aligned} \kappa(Y) &= \sum_{i=1}^n |S_{c_i}| \\ &= \sum_{i=1}^n (|S_{c_i}| - 1) + n \\ &= \kappa(Y''_a) + \kappa(Y'_a). \end{aligned}$$





## CHAPITRE III

### GRAPHE EFFONDRE

Le but de ce chapitre est de démontrer le Théorème 3. À cet effet, nous devons étudier le comportement des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y'_a$ , obtenu en supprimant l'arête  $a$  contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ , et du graphe  $Y''_a$ , obtenu en contractant l'arête  $a$ . Notamment, nous devons examiner attentivement ce qui advient des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$  lorsqu'une arête comprise dans un cycle de  $Y$  est supprimée. Pour ce faire, nous construisons le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$ , dont les propriétés illustrent ce comportement. Dans un premier temps, nous introduisons les notions nécessaires pour la construction de ce graphe effondré et donnons un exemple de ce graphe à partir d'un graphe donné. Nous montrons ensuite que le graphe effondré est une forêt. Puis nous concluons que le nombre  $\kappa(Y''_a)$  correspond au nombre d'arêtes de ce graphe tandis que le nombre  $\kappa(Y'_a)$  correspond au nombre de ses composantes connexes.

#### 3.1 Construction du graphe effondré

En supprimant une arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$ , des  $\kappa$ -classes d'équivalence de  $Acyc(Y)$  peuvent se *restreindre* à une seule  $\kappa$ -classe d'équivalence de  $Acyc(Y'_a)$ , où  $Y'_a$  est le graphe obtenu du graphe  $Y$  en supprimant l'arête  $a$  contenue dans un cycle non orienté de  $Y$ . Nous disons que deux classes  $[O_Y]$  et  $[O'_Y]$  se *restreignent* à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$  si en supprimant l'arc  $a$  de ces deux orientations  $O_Y$  et  $O'_Y$ , nous obtenons deux orientations de  $Y'_a$  qui sont clic-équivalentes. Voyons un exemple de ce phénomène.



**Exemple 4.** Considérons le graphe  $Y$  représenté à la Figure 3.1 et l'arête  $a = \{1, 3\}$ . Ce graphe possède 6  $\kappa$ -classes d'équivalence :  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_6$ . Ces classes sont respectivement représentées par les orientations acycliques compatibles avec les permutations 2341, 2143, 2431, 2413, 2134 et 2314 :

$$\kappa_1 = [2341] = \{2341, 3412, 4123, 1234\}$$

$$\kappa_2 = [2143] = \{2143, 1432, 4321, 3214\}$$

$$\kappa_3 = [24\mathbf{31}] = \{24\mathbf{31}, 4\mathbf{312}, \mathbf{3124}, 1243\}$$

$$\kappa_4 = [24\mathbf{13}] = \{24\mathbf{13}, 4\mathbf{132}, \mathbf{1324}, 3241\}$$

$$\kappa_5 = [2\mathbf{134}] = \{2\mathbf{134}, \mathbf{1342}, 3421, 42\mathbf{13}\}$$

$$\kappa_6 = [2\mathbf{314}] = \{2\mathbf{314}, \mathbf{3142}, 1423, 42\mathbf{31}\}.$$

En supprimant l'arête  $a = \{1, 3\}$ , nous obtenons le graphe  $Y'_a$  qui lui possède 4  $\kappa$ -classes d'équivalence :

$$\kappa'_1 = [2341] = \{2341, 3412, 4123, 1234\}$$

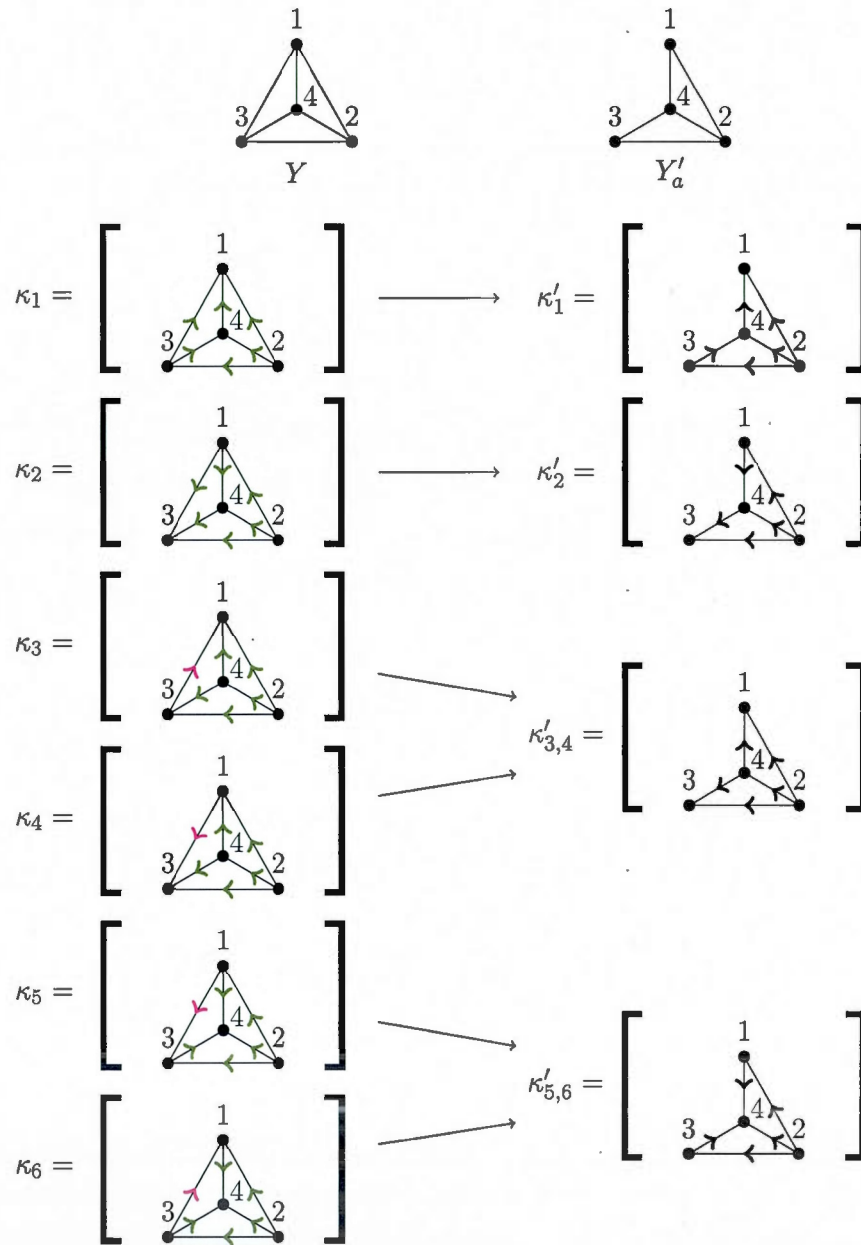
$$\kappa'_2 = [2143] = \{2143, 1432, 4321, 3214\}$$

$$\kappa'_{3,4} = [24\mathbf{31}] = \{24\mathbf{31} = 24\mathbf{13}, 4\mathbf{132} = 4\mathbf{312}, \mathbf{3124} = \mathbf{1324}, 1243, 3241\}$$

$$\kappa'_{5,6} = [2\mathbf{134}] = \{2\mathbf{134} = 2\mathbf{314}, \mathbf{3142} = \mathbf{1342}, 1423, 3421, 42\mathbf{13} = 42\mathbf{31}\}.$$

Nous remarquons que les deux orientations acycliques de  $Y$  représentant respectivement les classes  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  diffèrent uniquement par l'orientation de l'arc  $a$ . En supprimant cet arc, nous obtenons donc une même orientation acyclique du graphe  $Y'_a$ . Ainsi, les classes  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  se fondent en une même classe  $\kappa'_{3,4}$  de  $Acyc(Y'_a)$  suite à la suppression de l'arc  $a$ . De même, les classes  $\kappa_5$  et  $\kappa_6$  de  $Acyc(Y)$  se restreignent à une seule classe de  $Acyc(Y'_a)$ , soit la classe  $\kappa'_{5,6}$ . Toutefois, aucune orientation contenue dans la classe  $\kappa_1$  ne diffère uniquement par l'arc  $a$  par rapport à une orientation de la classe  $\kappa_2$ . Ainsi, les classes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  forment deux classes différentes de  $Acyc(Y'_a)$ , soit les classes  $\kappa'_1$  et  $\kappa'_2$ .

Nous construisons dans ce chapitre le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  nous permettant d'illustrer ce comportement de restriction de classes. L'ensemble des sommets de ce



**Figure 3.1** Classes d'équivalence des graphes  $Y$  et  $Y'_a$  pour l'arête  $a = \{1, 3\}$  du graphe  $Y$ .

graphe est constitué des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$  et l'ensemble de ses arêtes, quant à lui, est construit de façon à ce qu'il soit en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y''_a$ . Afin de donner la définition de l'ensemble des arêtes du graphe effondré, nous avons besoin tout d'abord de définir la fonction de relèvement d'une orientation acyclique.

### 3.1.1 Relèvement d'une orientation acyclique

La fonction de *relèvement*  $r_{(v,w)}$  est définie sur l'ensemble des orientations acycliques du graphe  $Y''_a$  dont l'arête  $a = \{v, w\}$  contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$  a été contractée. Cette fonction associe à une orientation acyclique  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  l'orientation  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}_Y$  dont l'arête  $a$  du graphe  $Y$  est orientée de  $v$  vers  $w$  et dont l'orientation de toutes autres arêtes de  $Y$  est obtenue à partir de l'orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ , voir la Figure 3.2 pour un exemple.

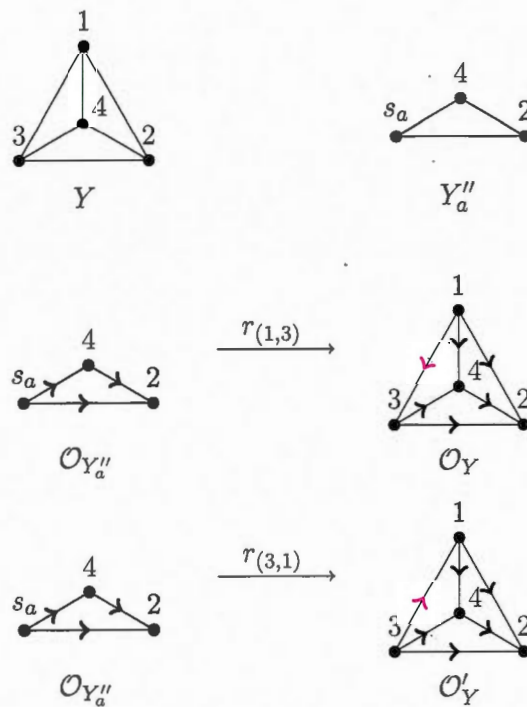
**Définition 5.** Soit  $Y$  un graphe et  $a = \{v, w\}$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . La fonction de relèvement  $r_{(v,w)}$  d'une orientation acyclique est définie comme suit :

$$\begin{aligned} r_{(v,w)}: \text{Acyc}(Y''_a) &\rightarrow \mathcal{O}r(Y) \\ \mathcal{O}_{Y''_a} &\mapsto r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}_Y \end{aligned}$$

où l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  est telle que pour toute arête  $b \in A_Y$  nous avons :

$$\mathcal{O}_Y(b) = \begin{cases} \mathcal{O}_{Y''_a}(b) & \text{si } b \cap a = \emptyset \\ (v, w) & \text{si } b = a = \{v, w\} \\ (x, y) & \text{si } b \cap a = \{x\} \text{ et } \{y\} = b \setminus a \text{ et si } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, y\}) = (s_a, y) \\ (y, x) & \text{si } b \cap a = \{x\} \text{ et } \{y\} = b \setminus a \text{ et si } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, y\}) = (y, s_a) \end{cases}$$

**Exemple 5.** Dans la Figure 3.2, les orientations des arêtes du graphe  $Y$  suite au relè-



**Figure 3.2** Les orientations  $O_Y$  et  $O'_Y$  sont respectivement les images de l'orientation acyclique  $O_{Y''_a}$  par les fonctions de relèvement  $r_{(1,3)}$  et  $r_{(3,1)}$  où  $Y''_a$  est le graphe obtenu en contractant l'arête  $a = \{1, 3\}$  du graphe  $Y$ .

vement  $r_{(1,3)}$  de l'orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  sont définies comme suit :

$$\mathcal{O}_Y(\{2, 4\}) = \mathcal{O}_{Y''_a}(\{2, 4\}) \text{ car } \{2, 4\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$$

$$\mathcal{O}_Y(\{1, 3\}) = (1, 3) \text{ car } \{1, 3\} = a$$

$$\mathcal{O}_Y(\{1, 2\}) = (2, 1) \text{ car } \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \text{ et } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 2\}) = (2, s_a)$$

$$\mathcal{O}_Y(\{1, 4\}) = (1, 4) \text{ car } \{1, 4\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \text{ et } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 4\}) = (s_a, 4)$$

$$\mathcal{O}_Y(\{2, 3\}) = (2, 3) \text{ car } \{2, 3\} \cap \{1, 3\} = \{3\} \text{ et } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 2\}) = (2, s_a)$$

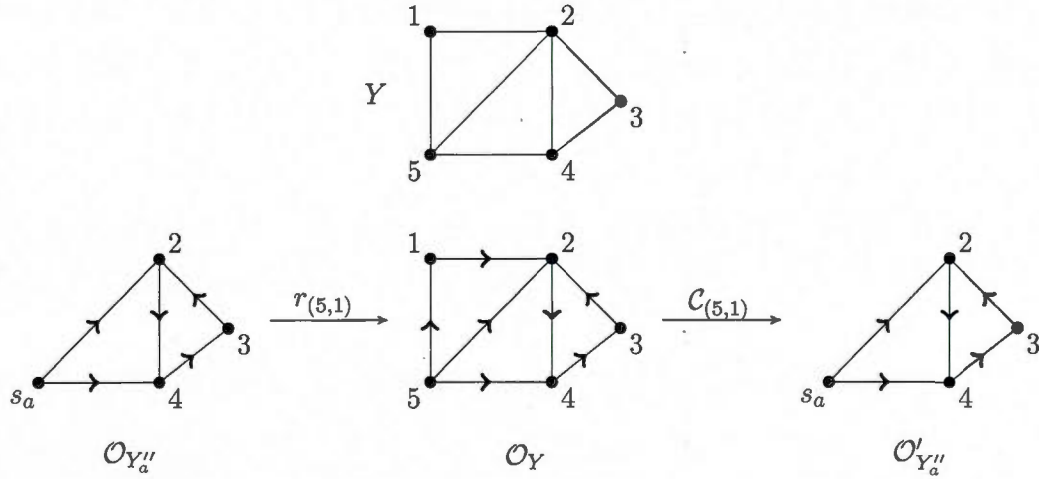
$$\mathcal{O}_Y(\{3, 4\}) = (3, 4) \text{ car } \{3, 4\} \cap \{1, 3\} = \{4\} \text{ et } \mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, 4\}) = (s_a, 4)$$

*Remarque 13.* Nous avons vu à la Définition 4 du chapitre précédent qu'une orientation  $a$ -contractile du graphe  $Y$  est une orientation dont l'arc  $a$  peut être contracté sans confusion pour l'orientation des arêtes de la forme  $\{s_a, u\}$  dans  $Y''_a$ . Nous remarquons maintenant qu'une orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  obtenue d'un relèvement d'une orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  est toujours  $a$ -contractile. En effet, supposons que  $a = \{v, w\}$  et que pour un sommet  $u \in S_Y$  nous ayons  $\{u, v\}, \{u, w\} \in A_Y$ . Comme  $u$  est adjacent aux sommets  $v$  et  $w$  de  $Y$  qui sont contractés en le sommet  $s_a$  de  $Y''_a$ , alors  $\{u, s_a\} \in A_{Y''_a}$ . Supposons donc sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_{Y''_a}(\{u, s_a\}) = (u, s_a)$ . Nous avons alors par définition de relèvement que  $\mathcal{O}_Y(\{u, v\}) = (u, v)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{u, w\}) = (u, w)$ , ce qui correspond à la définition d'orientation  $a$ -contractile.

Soulignons que par construction, deux orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  obtenues respectivement par les relèvements  $r_{(v,w)}$  et  $r_{(w,v)}$  diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a = \{v, w\}$  du graphe  $Y$ . Nous montrons en outre dans la dernière section de ce chapitre que les  $\kappa$ -classes de  $Y$  qui se restreignent à une seule  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$  sont les classes qui contiennent des orientations qui diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a$ .

Nous allons maintenant montrer que  $r_{(v,w)}$  est bien définie sur l'ensemble des classes d'équivalence du graphe  $Y''_a$ . À cette fin, nous avons besoin du résultat suivant qui stipule que la fonction de contraction d'arc composée avec la fonction de relèvement est une fonction identité sur l'ensemble des orientations du graphe  $Y'_a$ .

**Proposition 13.** *Soit  $Y''_a$  le graphe obtenu en contractant l'arête  $a = \{v, w\}$  conte-*



**Figure 3.3** L'orientation  $O_Y$  est obtenue du relèvement  $r_{(5,1)}$  de l'orientation acyclique  $O_{Y''}$  du graphe  $Y''$ , où  $a = \{1, 5\} \in A_Y$ . En contractant l'arc  $(5, 1)$  de l'orientation  $O_Y$ , nous obtenons l'orientation  $O'_{Y''}$  et devons montrer que  $O_{Y''} = O'_{Y''}$ .

nue dans un cycle non orienté du graphe  $Y$ . Soit  $O_{Y''}$  une orientation de  $Y''$ . Alors  $r_{(v,w)}(O_{Y''})$  est  $a$ -contractile et

$$C_a \circ r_{(v,w)}(O_{Y''}) = O_{Y''}$$

où  $C_a$  est la fonction de contraction de l'arc  $a$ .

*Démonstration.* Soit  $O_{Y''}$  une orientation du graphe  $Y''$  où  $a = \{v, w\}$  est une arête contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Notons  $r_{(v,w)}(O_{Y''}) = O_Y$ , où  $O_Y$  est une orientation du graphe  $Y$ , et  $C_a(O_Y) = O'_{Y''}$ , où  $O'_{Y''}$  est une orientation du graphe  $Y''$ , voir Figure 3.3. Nous voulons montrer que  $O_{Y''} = O'_{Y''}$ , c'est-à-dire, montrer que  $O_{Y''}(b) = O'_{Y''}(b)$  pour toute arête  $b$  du graphe  $Y''$ . Pour vérifier ceci, nous déterminons la nature de l'orientation  $O'_{Y''}$  obtenue en relevant et contractant l'orientation  $O_{Y''}$  à partir de la définition de la fonction de relèvement et de contraction d'arc. Tout d'abord, notons que les fonctions  $C_a$  et  $r_{(v,w)}$  ne changent pas les orientations des arêtes communes aux graphes  $Y$  et  $Y''$ . Il suffit donc de montrer que si  $b = \{x, y\}$



est une arête de  $Y$  telle que  $b \cap a = \{x\}$ , c'est-à-dire  $x = v$  ou  $x = w$ , alors l'arête  $\{s_a, x\}$  est orientée de la même façon par  $\mathcal{O}_{Y''}$  et  $\mathcal{O}'_{Y''}$ . Soit  $b$  une arête de  $Y$  telle que  $b \cap a = \{x\}$  et  $b = \{x, y\}$ . Nous supposons que  $\mathcal{O}_{Y''}(\{s_a, y\}) = (s_a, y)$ , l'autre cas étant symétrique. Alors par définition de la fonction de relèvement nous avons  $\mathcal{O}_Y(b) = (x, y)$ . Donc par définition de  $\mathcal{C}_a$ , nous avons  $\mathcal{O}'_{Y''}(\{s_a, y\}) = (s_a, y)$ . Ceci conclut la preuve de la proposition. ■

Nous nous servons maintenant de cette propriété afin de montrer que le relèvement d'une orientation acyclique résulte aussi en une orientation acyclique.

**Corollaire 4.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $Y''_a$  le graphe obtenu de  $Y$  par contraction de  $a$  et  $\mathcal{O}_{Y''}$  une orientation acyclique de  $Y''_a$ . Alors  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''})$  est une orientation acyclique du graphe  $Y$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_{Y''}$  une orientation acyclique du graphe  $Y''_a$ , où  $a = \{v, w\} \in A_Y$ . Supposons par contradiction que  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}_Y$  est une orientation cyclique du graphe  $Y$ . D'après la Proposition 13, nous avons alors  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y''} \in \text{Acyc}(Y''_a)$  et donc la contraction de l'orientation cyclique  $\mathcal{O}_Y$  résulte en une orientation acyclique. Ceci contredit le Théorème 1 du chapitre précédent. ■

### 3.1.2 Relèvement d'une $\kappa$ -classe d'équivalence

Comme le relèvement d'une orientation acyclique est aussi une orientation acyclique, nous nous questionnons maintenant à savoir si cette fonction de relèvement est bien définie sur l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y''_a$ . Autrement dit, les images par  $r_{(v,w)}$  (ou  $r_{(w,v)}$ ) d'orientations contenues dans une même  $\kappa$ -classe de  $Y''_a$  sont-elles contenues dans une même  $\kappa$ -classe du graphe  $Y$ ? La proposition suivante répond par l'affirmative à cette question.

**Proposition 14.** (i) *La fonction  $r_{(v,w)}: \text{Acyc}(Y''_a) \rightarrow \text{Acyc}(Y)$  se factorise en la fonction bien définie*

$$\mathcal{R}_{(v,w)}: \text{Acyc}(Y''_a) / \sim_{\kappa} \rightarrow \text{Acyc}(Y) / \sim_{\kappa};$$

(ii) Les fonctions de relèvement  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  sont injectives.

*Démonstration.* (i) Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a = \{v, w\}$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $\mathcal{O}_{Y''}$  et  $\mathcal{O}'_{Y''}$  deux orientations acycliques du graphe  $Y''$  telles que  $cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}'_{Y''}$  pour  $cl = cl_{v_1} cl_{v_2} \dots cl_{v_n}$ . Soit  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$  et  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}'_{Y''}) = \mathcal{O}'_Y \in \text{Acyc}(Y)$ . Nous allons montrer qu'il existe une suite de clics  $cl'$  telle que  $cl'(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ , c'est-à-dire, que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{Y''} & \xrightarrow{cl} & \mathcal{O}'_{Y''} \\
 r_{(v,w)} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow r_{(v,w)} \\
 \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{cl'} & \mathcal{O}'_Y
 \end{array}$$

Par transitivité de la relation de clic, il suffit de considérer le cas où une seule source est cliquée. Le cas général s'obtient par récurrence sur la longueur de la suite de clics. Soit  $cl = cl_{v_1}$  et montrons que la suite de clics  $cl'$  peut être définie comme suit :

$$cl' = \begin{cases} cl_{v_1} & \text{si } v_1 \neq s_a \\ cl_w \circ cl_v & \text{si } v_i = s_a \end{cases}$$

Pour ce faire, vérifions que les arêtes de  $Y$  sont orientées de la même façon par  $\mathcal{O}'_Y$  et par l'orientation obtenue en relevant d'abord  $\mathcal{O}_{Y''}$  puis en appliquant  $cl'$  à l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  ainsi obtenue. Notons d'abord que les orientations des arêtes communes à  $Y$  et  $Y''$  ne sont pas changées par le relèvement  $r_{(v,w)}$ . Il suffit donc de vérifier l'orientation des arêtes incidentes à  $s_a$  dans  $Y''$  et celles incidentes à  $v$  et  $w$  dans  $Y$ . Considérons trois cas : (1)  $v_1 \neq s_a$  et  $v_1$  n'est pas incident à  $s_a$ ; (2)  $v_1 \neq s_a$  et  $v_1$  est incident à  $s_a$ ; (3)  $v_1 = s_a$ ;

(1) Dans le premier cas, si  $v_1 \neq s_a$  et  $v_1$  n'est pas incident à  $s_a$ , alors cliquer le sommet  $v_1$  dans  $\mathcal{O}_{Y''}$  ou dans  $\mathcal{O}_Y$  ne change seulement que les orientations

des arêtes communes aux graphes  $Y$  et  $Y''_a$ . Mais comme les orientations de ces arêtes restent inchangées par le relèvement  $r_{(v,w)}$ , nous avons bien que le diagramme commute dans ce cas.

- (2) Supposons que  $v_1 \neq s_a$  et  $v_1$  est incident à  $s_a$ . Nous posons donc  $cl' = cl_{v_1}$ . D'abord, en cliquant le sommet  $v_1$  dans  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ ,  $v_1$  devient un puits de l'orientation  $\mathcal{O}'_{Y''_a}$ . En particulier, l'arête  $\{s_a, v_1\}$  est entrante dans  $v_1$ . En relevant cette orientation,  $v_1$  reste toujours un puits dans  $\mathcal{O}'_Y$  par définition du relèvement. En particulier,  $\{v, v_1\}$  ou  $\{w, v_1\}$  sont des arêtes de  $Y$  puisque  $\{s_a, v_1\}$  est une arête de  $Y''_a$  et donc  $\{v, v_1\}$  ou  $\{w, v_1\}$  sont entrantes dans  $v_1$ . Les orientations de toutes autres arêtes  $\{v, x\}, \{w, y\} \in A_Y$  sont définies d'après les orientations des arêtes  $\{s_a, x\}$  et  $\{s_a, y\}$  dans  $\mathcal{O}'_{Y''_a}$ . De plus,  $\{v, w\}$  est orientée  $(v, w)$  par définition du relèvement.

Ensuite, en relevant d'abord l'orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  par  $r_{(v,w)}$ , nous obtenons que  $\{v, w\}$  est orientée  $(v, w)$  dans l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  résultante. De plus, comme  $v_1$  est une source de  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ ,  $v_1$  reste toujours une source dans  $\mathcal{O}_Y$  par définition du relèvement. Comme  $v_1$  est incident à  $s_a$ , alors les arêtes  $\{v, v_1\}$  ou  $\{w, v_1\}$  sont des arêtes de  $Y$  et donc  $\{v, v_1\}$  ou  $\{w, v_1\}$  sont orientées  $(v_1, v)$  ou  $(v_1, w)$  dans  $\mathcal{O}_Y$ . Ainsi, en appliquant  $cl'$ , c'est-à-dire, en cliquant  $v_1$ , nous obtenons que  $\{v, w\}$  reste orientée  $(v, w)$  et toute autre arête incidente à  $v_1$ , en particulier  $\{v, v_1\}$  ou  $\{w, v_1\}$ , est alors entrante dans  $v_1$ . De plus, les orientations de toutes autres arêtes  $\{v, x\}$  et  $\{w, y\}$  de  $Y$  sont définies d'après les orientations des arêtes  $\{s_a, x\}$  et  $\{s_a, y\}$  dans  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ . Mais comme le clic sur  $v_1$  ne change pas l'orientation des arêtes  $\{s_a, x\}$  et  $\{s_a, y\}$  dans  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  quand  $x$  et  $y$  sont différents de  $v_1$ , nous avons que  $\mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, x\}) = \mathcal{O}'_{Y''_a}(\{s_a, x\})$  et  $\mathcal{O}_{Y''_a}(\{s_a, y\}) = \mathcal{O}'_{Y''_a}(\{s_a, y\})$ . Par conséquent, nous avons bien que le diagramme commute dans ce cas.

- (3) Supposons maintenant que  $v_1 = s_a$ . Nous avons alors  $cl = cl_{s_a}$  et donc  $cl' = cl_w \circ cl_v$ . En cliquant d'abord  $s_a$  dans  $\mathcal{O}_{Y''_a}$ ,  $s_a$  devient un puits de  $\mathcal{O}'_{Y''_a}$ . Ainsi, toute arête  $\{s_a, x\}$  de  $Y''_a$  est entrante dans  $s_a$  dans  $\mathcal{O}'_{Y''_a}$ . Dans l'orientation  $\mathcal{O}'_Y$

obtenue en relevant  $\mathcal{O}_{Y_a}''$  par  $r_{(v,w)}$ , nous avons donc que toutes les arêtes incidentes à  $v$  sont entrantes dans  $v$  et toutes les arêtes incidentes à  $w$  sont entrantes dans  $w$ , sauf pour l'arête  $\{v, w\}$  qui elle est orientée  $(v, w)$ .

De plus, comme  $s_a$  est une source de  $\mathcal{O}_{Y_a}''$ ,  $s_a$  demeure toujours une source de  $\mathcal{O}_Y$  en relevant  $\mathcal{O}_{Y_a}''$ . Ainsi, toutes les arêtes incidentes à  $v$  sont sortantes de  $v$  et toutes les arêtes incidentes à  $w$  sont sortantes de  $w$  dans  $\mathcal{O}_Y$ , sauf pour l'arête  $\{v, w\}$  qui elle est orientée  $(v, w)$ . En particulier,  $v$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ . Nous pouvons donc bien cliquer  $v$  d'abord, ce qui fait en sorte que  $v$  devient un puits et  $w$  une source. En cliquant finalement  $w$ , celui-ci devient un puits. En particulier,  $\{v, w\}$  est à nouveau orientée  $(v, w)$  dans l'orientation obtenue. De plus, cette dernière orientation est telle que toutes les arêtes incidentes à  $w$  sont entrantes dans  $w$  et les arêtes incidentes à  $v$  sont entrantes dans  $v$ , sauf l'arête  $\{v, w\}$  qui elle est orientée  $(v, w)$ . Ainsi, nous avons bien que le diagramme commute dans ce cas.

Finalement, nous avons bien que la suite de clics  $cl'$  définie plus haut est telle que  $cl' \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y_a}'') = r_{(v,w)} \circ cl(\mathcal{O}_{Y_a}'')$ . Ainsi, les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_Y'$  obtenues respectivement du relèvement  $r_{(v,w)}$  des orientations  $\kappa$ -équivalentes  $\mathcal{O}_{Y_a}''$  et  $\mathcal{O}_{Y_a}'$  sont aussi  $\kappa$ -équivalentes. D'où le résultat.

- (ii) Soit  $Y$  un graphe et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $[\mathcal{O}_{Y_a}'']$  et  $[\mathcal{O}_{Y_a}']$  deux  $\kappa$ -classes d'équivalence de  $Acyc(Y_a'')$  telles que  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y_a}'']) = \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y_a}'])$ . Montrons que  $[\mathcal{O}_{Y_a}''] = [\mathcal{O}_{Y_a}']$ . Pour montrer ceci, montrons qu'il existe une suite de clics  $cl$  reliant  $\mathcal{O}_{Y_a}''$  et  $\mathcal{O}_{Y_a}'$ . D'abord, nous supposons sans perte de généralité que  $s_a$  est une source dans ces deux orientations, en vertu de la Proposition 6.

Posons  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y_a}'') = \mathcal{O}_Y \in Acyc(Y)$  et  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y_a}') = \mathcal{O}_Y' \in Acyc(Y)$ . Par hypothèse, les relèvements par  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  des classes respectives de  $\mathcal{O}_{Y_a}''$  et  $\mathcal{O}_{Y_a}'$  ont pour image la même classe de  $Y$ . Par conséquent, les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_Y'$  sont  $\kappa$ -équivalentes.

Soit donc  $cl'$  une suite de clics telle que  $cl'(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y'$ . Afin d'être en mesure de bien définir un candidat pour la suite de clics  $cl$ , il nous faut tout d'abord montrer



que nous pouvons, sans perte de généralités, supposer que  $cl_w$  suit immédiatement chaque occurrence de  $cl_v$  dans  $cl'$ . D'une part, nous avons que  $cl_v$  et  $cl_w$  doivent apparaître le même nombre de fois dans la suite  $cl'$  puisque  $\{v, w\}$  est orientée  $(v, w)$  dans  $\mathcal{O}_Y$  et dans  $\mathcal{O}'_Y$ . Donc si  $v$  est cliqué, l'arc  $(v, w)$  devient orienté  $(w, v)$  et alors  $w$  doit être cliqué à son tour pour renverser l'orientation de l'arc  $(w, v)$ . Puis, comme  $s_a$  est une source de  $\mathcal{O}_{Y''}$  et de  $\mathcal{O}'_{Y''}$ , nous avons  $\mathcal{O}_Y(\{x, v\}) = \mathcal{O}'_Y(\{x, v\}) = (v, x)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{x, w\}) = \mathcal{O}'_Y(\{x, w\}) = (w, x)$  pour toute arête  $\{x, v\}, \{x, w\}$  de  $Y$  où  $x \notin \{v, w\}$ . De plus, l'arête  $\{v, w\}$  est orientée de  $v$  vers  $w$  dans  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  par construction. Ainsi,  $v$  est une source dans  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  et tous les arcs incidents à  $w$  sont sortants de  $w$ , sauf l'arc  $(v, w)$ . De ce fait, lorsque  $v$  est cliqué dans la suite de clics  $cl'$ , l'arc  $(v, w)$  devient entrant dans  $w$  et donc  $w$  devient une source dans l'orientation obtenue. D'autre part, puisqu'une orientation acyclique peut contenir plusieurs sources, il est possible que  $cl_v$  et  $cl_w$  n'apparaissent pas successivement dans la suite de clics  $cl'$ . Nous pouvons toutefois supposer que chaque occurrence d'un clic sur  $v$  dans  $cl'$  est immédiatement suivie d'un clic sur  $w$ . En effet, si  $cl_v$  et  $cl_w$  n'apparaissent pas successivement dans  $cl'$ , cette suite de clic serait, en vertu de la Proposition 4, de la forme  $cl' = cl_{v_1} \dots cl_{v_k} cl_{w_1} \dots cl_{w_r} cl_0$  où les  $v_i$  sont toutes des sources de l'orientation de départ  $\mathcal{O}_Y$ . Les  $w_i$  quant à eux sont toutes des sources de l'orientation obtenue après avoir cliqué toutes les sources de  $\mathcal{O}_Y$ . Donc  $v$  (respectivement  $w$ ) se trouve parmi les  $v_i$  (respectivement  $w_i$ ). Comme la Proposition 4 stipule aussi que nous pouvons permuter tous les  $v_i$ , nous pouvons supposer que  $v_k = v$  et  $w_1 = w$ . En répétant cet argument avec  $cl_0$  au besoin, nous obtenons bien que nous pouvons, sans perte de généralités, supposer que  $cl_w$  suit immédiatement chaque occurrence de  $cl_v$  dans  $cl'$ .

Grâce au fait que nous pouvons supposer que  $cl_v$  et  $cl_w$  apparaissent successivement dans la suite de clics  $cl'$ , nous pouvons définir la suite de clics  $cl$  sur l'ensemble des sommets de  $Y''_a$  en remplaçant dans  $cl'$  chaque occurrence du couple  $cl_v cl_w$  par un unique clic sur  $s_a$ . Nous devons alors montrer que la suite de clics  $cl$  ainsi définie est telle que  $cl(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}'_{Y''_a}$ . Posons  $cl' = u_0 cl_v cl_w u_1 cl_v cl_w \dots u_n$  où les  $u_i$  sont

des mots en  $cl_x$  où  $x \in S_Y \setminus \{v, w\}$  et donc  $x \in S_{Y''} \setminus \{s_a\}$ . Notons que  $u_1$  et  $u_n$  sont possiblement les mots vides. Nous notons donc  $cl = u_0 cl_{s_a} u_1 cl_{s_a} \dots u_n$ . Pour montrer que  $cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}'_{Y''}$ , nous allons montrer que

$$r_{(v,w)} \circ cl(\mathcal{O}_{Y''}) = cl' \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}).$$

En effet, si  $r_{(v,w)} \circ cl(\mathcal{O}_{Y''}) = cl' \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''})$ , nous aurons par la Proposition 13 que

$$cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{C}_a \circ r_{(v,w)} \circ cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{C}_a \circ cl' \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{C}_a \circ cl'(\mathcal{O}_Y).$$

Or,  $cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{C}_a(\mathcal{O}'_Y)$  car  $cl'(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  par hypothèse. Ainsi, comme  $\mathcal{O}'_Y = r_{(v,w)}(\mathcal{O}'_{Y''})$ , nous aurons bien

$$cl(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{C}_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{C}_a \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}'_{Y''}) = \mathcal{O}'_{Y''}$$

en vertu de la Proposition 13.

Montrons donc que  $r_{(v,w)} \circ cl(\mathcal{O}_{Y''}) = cl' \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''})$  pour  $cl' = u_0 cl_v cl_w u_1 cl_v cl_w \dots u_n$  et  $cl = u_0 cl_{s_a} u_1 cl_{s_a} \dots u_n$ . Notons d'abord que nous avons montré en (i) les équations suivantes :

$$cl_w \circ cl_v \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = r_{(v,w)} \circ cl_{s_a}(\mathcal{O}_{Y''}) \quad (3.1)$$

$$cl_{v_1} \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = r_{(v,w)} \circ cl_{v_1}(\mathcal{O}_{Y''}) \quad (3.2)$$

pour  $v_1 \neq s_a$  et  $v_1 \neq v, w$ . Nous devons montrer que

$$\begin{aligned} & r_{(v,w)} \circ (u_n \circ cl_{s_a} \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ cl_{s_a} \circ u_0)(\mathcal{O}_{Y''}) \\ &= (u_n \circ cl_w \circ cl_v \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ cl_w \circ cl_v \circ u_0) \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}). \end{aligned}$$

Comme les  $u_i$  sont des mots en  $cl_x$  où  $x$  est un sommet différent de  $s_a, v$  ou  $w$ , nous avons que :

$$\begin{aligned} & u_n \circ cl_w \circ cl_v \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ cl_w \circ cl_v \circ u_0 \circ r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) \\ &= u_n \circ cl_w \circ cl_v \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ cl_w \circ cl_v \circ r_{(v,w)} \circ u_0(\mathcal{O}_{Y''}) \text{ par l'équation (3.2)} \\ &= u_n \circ cl_w \circ cl_v \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ r_{(v,w)} \circ cl_{s_a} \circ u_0(\mathcal{O}_{Y''}) \text{ par l'équation (3.1)} \\ &= \dots \\ &= r_{(v,w)} \circ u_n \circ cl_{s_a} \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ cl_{s_a} \circ u_0(\mathcal{O}_{Y''}). \end{aligned}$$



Ainsi, nous concluons que la suite de clics  $cl$  est telle que  $cl(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}'_{Y''_a}$  et donc  $[\mathcal{O}_{Y''_a}] = [\mathcal{O}'_{Y''_a}]$ . D'où  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  est injective.

■

### 3.1.3 Définition du graphe effondré

Maintenant que les fonctions de relèvement  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  sont bien définies, nous pouvons définir l'ensemble des arêtes du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$  comprise dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ .

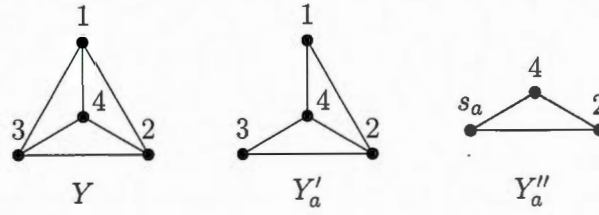
**Définition 6.** Soit  $a$  une arête comprise dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Le *graphe effondré*  $\mathcal{E}_a(Y)$  de  $Y$  et de l'arête  $a$  est le graphe ayant comme ensemble de sommet l'ensemble  $Acyc(Y)/\sim_\kappa$  et deux classes d'équivalence de  $Y$  constituent une arête si elles sont obtenues respectivement par l'image des relèvements  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  d'une même classe d'équivalence de  $Y''_a$ , c'est-à-dire,

$$\{ \{ \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) \} \mid \mathcal{O}_{Y''_a} \in Acyc(Y''_a)/\sim_\kappa \}.$$

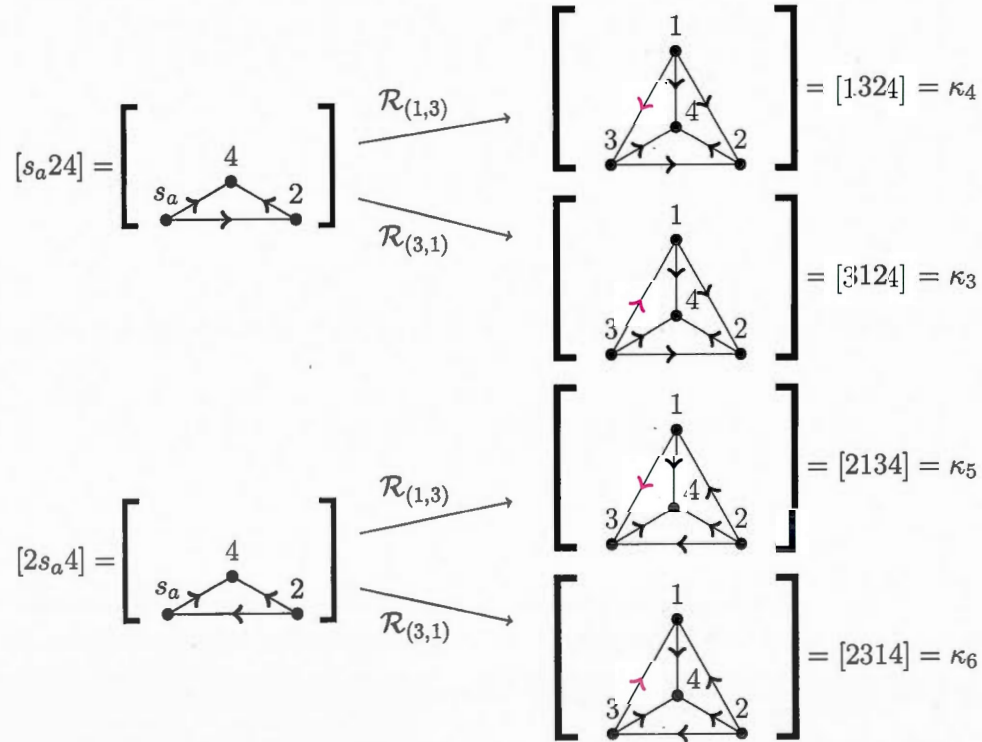
**Exemple 6.** Construisons le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe complet à 4 sommets  $Y$  et de l'arête  $a = \{1, 3\}$  illustré à la Figure 3.4.

Les sommets de  $\mathcal{E}_a(Y)$  sont les 6  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$ , notée  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$ ,  $\kappa_4$ ,  $\kappa_5$  et  $\kappa_6$ , voir Figure 3.1. Ses arêtes, quant à elles, sont construites à partir des classes du graphe  $Y''_a$  obtenu de  $Y$  en contractant l'arête  $a$ . Ce graphe  $Y''_a$  possède 2 classes d'équivalence respectivement représentées par les orientations acycliques compatibles avec les permutations  $s_a 24$  et  $2s_a 4$ . En appliquant les fonctions de relèvement  $\mathcal{R}_{(1,3)}$  et  $\mathcal{R}_{(3,1)}$  sur chacune de ces classes, nous obtenons les classes  $\kappa_3$ ,  $\kappa_4$ ,  $\kappa_5$  et  $\kappa_6$  du graphe  $Y$ , voir Figure 3.5.

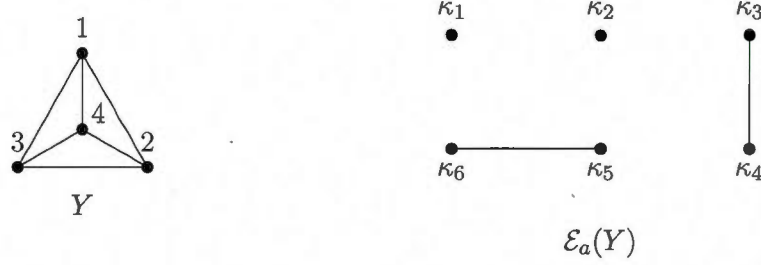
Comme les classes  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  sont respectivement obtenues des relèvement  $\mathcal{R}_{(3,1)}$  et  $\mathcal{R}_{(1,3)}$  à partir de la même classe de  $Y''_a$ , nous relient ces deux classes par une arête dans  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Nous faisons de même pour  $\kappa_5$  et  $\kappa_6$  pour la même raison. Ainsi, nous obtenons le graphe effondré illustré à la Figure 3.6.



**Figure 3.4** Les graphes  $Y'_a$  et  $Y''_a$  sont obtenus respectivement en supprimant et contractant l'arête  $a = \{1, 3\}$  du graphe complet à quatre sommets  $Y$ .



**Figure 3.5** Relèvements  $\mathcal{R}_{(1,3)}$  et  $\mathcal{R}_{(3,1)}$  des classes  $[s_a 24]$  et  $[2s_a 4]$  du graphe  $Y''_a$



**Figure 3.6** Graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe complet à quatre sommets  $Y$  et de l'arête  $a = \{1, 3\}$ .

*Remarque 14.* D'après cette définition, nous avons que  $\{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$  est une arête du graphe effondré si il existe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}]$  telle que

$$\{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])\} = \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}.$$

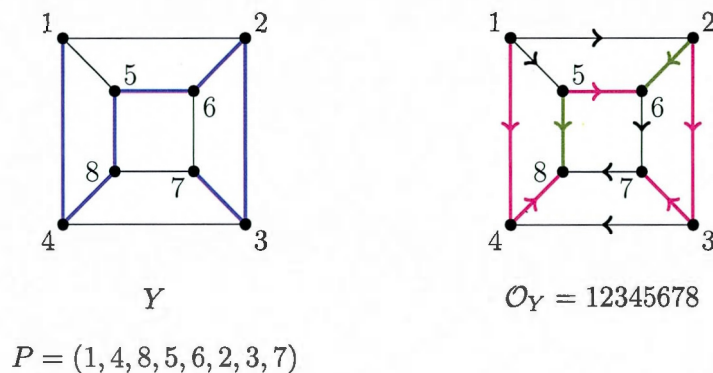
### 3.2 Nature du graphe effondré

Nous montrons dans cette section que le graphe effondré est une forêt, c'est-à-dire, un graphe non orienté ne contenant aucun cycle. En particulier, nous devons montrer que ce graphe ne contient aucune boucle et aucune arête multiple.

#### 3.2.1 Un invariant sur les classes de clic

Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $P$  un chemin de  $Y$ . La fonction  $\nu_P$  définie ci-dessous nous permet de quantifier le nombre d'arêtes dites positives par rapport aux arêtes dites négatives de ce chemin  $P$  dans l'orientation acyclique  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$ .

**Définition 7.** Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $P = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  un chemin simple de  $Y$  et possiblement un cycle de  $Y$ , c'est-à-dire  $s_1 = s_k$ . Soit  $\mathcal{O}_Y \in \text{Acyc}(Y)$ , nous notons  $ar_P^+(\mathcal{O}_Y)$  (respectivement  $ar_P^-(\mathcal{O}_Y)$ ) le nombre d'arêtes positives (respectivement



**Figure 3.7** Graphe  $Y$  à 8 sommets et son orientation acyclique compatible avec la permutation 12345678.

négatives) du chemin  $P$  dans l'orientation  $\mathcal{O}_Y$ , c'est-à-dire :

$$ar_P^+(\mathcal{O}_Y) = \#\{\{s_i, s_{i+1}\} \in P \mid \mathcal{O}_Y(\{s_i, s_{i+1}\}) = (s_i, s_{i+1})\}$$

$$ar_P^-(\mathcal{O}_Y) = \#\{\{s_i, s_{i+1}\} \in P \mid \mathcal{O}_Y(\{s_i, s_{i+1}\}) = (s_{i+1}, s_i)\}$$

Nous définissons alors la fonction  $\nu_P: Acyc(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$  où

$$\nu_P(\mathcal{O}_Y) = ar_P^+(\mathcal{O}_Y) - ar_P^-(\mathcal{O}_Y).$$

**Exemple 7.** Soit  $Y$  le graphe illustré à la Figure 3.7 et  $\mathcal{O}_Y$  l'orientation compatible avec la permutation 12345678. Soit  $P = (1, 4, 8, 5, 6, 2, 3, 7)$  un chemin du graphe non orienté  $Y$ . Les arêtes  $\{1, 4\}$ ,  $\{4, 8\}$ ,  $\{5, 6\}$ ,  $\{2, 3\}$  et  $\{3, 7\}$  sont des arêtes positives de  $P$  dans  $\mathcal{O}_Y$  tandis que les arêtes  $\{8, 5\}$  et  $\{6, 2\}$  sont négatives. Ainsi,

$$\nu_P(\mathcal{O}_Y) = ar_P^+(\mathcal{O}_Y) - ar_P^-(\mathcal{O}_Y) = 5 - 2 = 3.$$

Nous montrons dans la proposition suivante que si  $P$  est un cycle du graphe non orienté  $Y$ , alors la valeur de  $\nu_P$  est constante pour toutes orientations acycliques contenues dans une même classe d'équivalence de  $Y$ . Autrement dit,  $\nu_P$  est un invariant sur les classes de clic si  $P$  est un cycle du graphe non orienté  $Y$ .

**Lemme 2.** Soit  $P$  un cycle du graphe non orienté  $Y$ . La fonction  $\nu_P$  se factorise en la fonction bien définie

$$\mathcal{V}_P: \text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa \rightarrow \mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y$  deux orientations acycliques du graphe  $Y$  et soit  $cl$  une suite de clics telle que  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Soit  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$  un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Montrons que  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \nu_P(\mathcal{O}'_Y)$  par récurrence sur la longueur de la suite de clics  $cl$ .

Soit  $cl = cl_{s_1}$  et  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . Si  $s_1 \notin P$ , l'orientation d'aucune arête du cycle  $P$  n'est inversée après avoir cliqué  $s_1$ . Or, si  $s_1 \in P$ , alors cliquer  $s_1$  inverse exactement une arête positive en une arête négative et une arête négative en une arête positive. En effet, supposons sans perte de généralité que  $s_1 = v_1$  et écrivons donc  $P = (s_1, v_2, \dots, v_k, s_1)$ . Comme  $P$  est un cycle simple, alors  $\{s_1, v_2\}$  et  $\{v_k, s_1\}$  sont les seules arêtes de  $P$  incidentes au sommet  $s_1$ . Autrement dit, ces arêtes sont les seules arêtes de  $P$  dont l'orientation est inversée en cliquant  $s_1$ . De plus, comme  $s_1$  est une source de  $\mathcal{O}_Y$ , alors  $\mathcal{O}_Y(\{s_1, v_2\}) = (s_1, v_2)$  et  $\mathcal{O}_Y(\{v_k, s_1\}) = (s_1, v_k)$ . D'où  $\{s_1, v_2\}$  est positive dans  $\mathcal{O}_Y$  et  $\{v_k, s_1\}$  est négative dans  $\mathcal{O}_Y$ . En cliquant  $s_1$  dans  $\mathcal{O}_Y$ ,  $\{s_1, v_2\}$  devient négative dans  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  et  $\{v_k, s_1\}$  devient positive dans  $\mathcal{O}'_Y$ . Ainsi,  $ar_P^+(\mathcal{O}'_Y) = ar_P^+(\mathcal{O}_Y)$  et  $ar_P^-(\mathcal{O}'_Y) = ar_P^-(\mathcal{O}_Y)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \nu_P(\mathcal{O}'_Y) &= ar_P^+(\mathcal{O}_Y) - ar_P^-(\mathcal{O}_Y) \\ &= \nu_P(\mathcal{O}_Y). \end{aligned}$$

Si  $cl = cl_{s_1} \dots cl_{s_n}$  alors à chaque clic est inversée exactement une arête positive en une arête négative. Ainsi, nous avons bien par récurrence que  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \nu_P(\mathcal{O}'_Y)$  où  $cl(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$ . D'où la fonction  $\mathcal{V}_P: \text{Acyc}(Y)/\sim_\kappa \rightarrow \mathbb{Z}$  est bien définie. ■

Nous avons observé à la section précédente que les relèvements par  $r_{(v,w)}$  et  $r_{(w,v)}$  d'une orientation acyclique  $\mathcal{O}_{Y''}$  résultent en deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  de  $Y$

qui diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a$  du graphe  $Y$ . La proposition suivante nous garanti alors que l'évaluation de  $\nu_P$  sur deux telles orientations résulte toujours en des valeurs différentes si l'arête  $a$  se retrouve dans le chemin  $P$ . En particulier, nous concluons au Corollaire 6 que les relèvements par  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  d'une même  $\kappa$ -classe d'équivalence de  $Y''_a$  résulte toujours en deux  $\kappa$ -classes différentes du graphe  $Y$ .

**Proposition 15.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a = \{v, w\}$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  deux orientations acycliques de  $Y$  respectivement obtenues des relèvements  $r_{(v,w)}$  et  $r_{(w,v)}$  d'une même orientation acyclique du graphe  $Y''_a$ . Si  $P$  est un cycle simple de  $Y$  contenant l'arête  $a$ , alors*

$$\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \begin{cases} \nu_P(\mathcal{O}'_Y) + 2 & \text{si } v \text{ précède } w \text{ dans } P \\ \nu_P(\mathcal{O}'_Y) - 2 & \text{si } w \text{ précède } v \text{ dans } P. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $a = \{v, w\}$  une arête du graphe non orienté  $Y$  et soit  $\mathcal{O}_{Y''_a} \in \text{Acyc}(Y''_a)$  telle que  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}_Y$  et  $r_{(w,v)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}'_Y$ . En particulier,  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$  et  $\mathcal{O}'_Y(\{v, w\}) = (w, v)$ . De plus,  $\mathcal{O}_Y(b) = \mathcal{O}'_Y(b)$  pour toute arête  $b \neq a \in A_Y$ . Soit  $P = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_1)$  un cycle simple du graphe  $Y$  tel que  $a = \{v, w\}$  est contenue dans  $P$ . Notons  $ar_{P \setminus \{a\}}^+(\mathcal{O}_Y)$  (respectivement  $ar_{P \setminus \{a\}}^-(\mathcal{O}_Y)$ ) le nombre d'arêtes positives (respectivement négatives) de  $P$  dans  $\mathcal{O}_Y$ , excluant l'arête  $a$ . Comme  $\mathcal{O}_Y(b) = \mathcal{O}'_Y(b)$  pour toute arête  $b \neq a$ , alors

$$\begin{aligned} ar_{P \setminus \{a\}}^+(\mathcal{O}_Y) &= ar_{P \setminus \{a\}}^+(\mathcal{O}'_Y) \text{ et} \\ ar_{P \setminus \{a\}}^-(\mathcal{O}_Y) &= ar_{P \setminus \{a\}}^-(\mathcal{O}'_Y). \end{aligned}$$

Si  $v$  précède  $w$  dans  $P$ , alors  $a$  est une arête positive de  $P$  dans  $\mathcal{O}_Y$  puisque  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$ . À l'inverse,  $a$  est une arête négative de  $P$  dans  $\mathcal{O}'_Y$  puisque  $\mathcal{O}'_Y(\{v, w\}) = (w, v)$ . Ainsi, nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} \nu_P(\mathcal{O}_Y) &= (ar_{P \setminus \{a\}}^+(\mathcal{O}_Y) + 1) - ar_{P \setminus \{a\}}^-(\mathcal{O}_Y) \\ \nu_P(\mathcal{O}'_Y) &= ar_{P \setminus \{a\}}^+(\mathcal{O}_Y) - (ar_{P \setminus \{a\}}^-(\mathcal{O}_Y) + 1). \end{aligned}$$

D'où  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \nu_P(\mathcal{O}'_Y) + 2$ .



De manière analogue, si  $w$  précède  $v$  dans  $P$ , alors  $\nu_P(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_Y$  et donc  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \nu_P(\mathcal{O}'_Y) - 2$ . ■

Comme nous avons vu au Lemme 2 que la fonction  $\nu_P$  est bien définie sur les classes d'équivalence d'un graphe  $Y$ , nous déduisons de la Proposition 15 le corollaire suivant.

**Corollaire 5.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a = \{v, w\}$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $\{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$  une arête du graphe effondré telle que les classes  $[\mathcal{O}_Y]$  et  $[\mathcal{O}'_Y]$  sont respectivement obtenues des relèvements  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  d'une même  $\kappa$ -classe de  $Y''_a$ . Si  $P$  est un chemin simple fermé de  $Y$  contenant l'arête  $a$ , alors*

$$\nu_P([\mathcal{O}_Y]) = \begin{cases} \nu_P([\mathcal{O}'_Y]) + 2 & \text{si } v \text{ précède } w \text{ dans } P \\ \nu_P([\mathcal{O}'_Y]) - 2 & \text{si } w \text{ précède } v \text{ dans } P \end{cases}$$

### 3.2.2 Le graphe effondré est une forêt

Nous montrons dans cette section que le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  est une forêt, c'est-à-dire, un graphe ne contenant aucun cycle. Commençons par montrer que ce graphe ne contient pas de boucles.

Le fait que le graphe effondré ne contienne aucune boucle est un corollaire de la Proposition 15 de la section précédente. D'après définition, il y a une boucle sur le sommet  $[\mathcal{O}_Y]$  du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  si  $[\mathcal{O}_Y]$  est à la fois le résultat du relèvement  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et du relèvement  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  d'une classe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}]$ . Or, nous montrons dans le corollaire suivant que  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) \neq \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])$  pour toute classe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}]$  de  $Y''_a$ .

**Corollaire 6.** *Soit  $a$  une arête comprise dans un cycle du graphe  $Y$  et  $Y''_a$  le graphe obtenu de  $Y$  en contractant cette arête. Alors pour toute classe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}] \in \text{Acyc}(Y''_a)/\sim_\kappa$  nous avons  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) \neq \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un cycle simple du graphe non orienté  $Y$  contenant l'arête  $a$ . En vertu de la Proposition 15, si  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}_Y$  et  $r_{(w,v)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}'_Y$ , alors  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) =$

$\nu_P(\mathcal{O}'_Y) + 2$  ou  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) = \nu_P(\mathcal{O}'_Y) - 2$  selon le cas où  $v$  précède  $w$  dans le cycle  $P$  choisi, ou le contraire. Par conséquent,  $\nu_P(\mathcal{O}_Y) \neq \nu_P(\mathcal{O}'_Y)$  et donc par le Lemme 2,  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  ne peuvent être contenues dans une même classe d'équivalence de  $Y$ . Ainsi, nous avons bien  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) \neq \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])$  pour toute classe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}]$  de  $\text{Acyc}(Y''_a)$ . ■

**Proposition 16.** *Soit  $a$  une arête contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$  est un graphe simple.*

*Démonstration.* D'après le Corollaire 6, le graphe effondré ne contient pas de boucle. Nous devons donc montrer que  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne contient aucune arête multiple. Autrement dit, montrons que pour toute paire de  $\kappa$ -classes distinctes  $[\mathcal{O}_Y]$  et  $[\mathcal{O}'_Y]$ , il y a au plus une  $\kappa$ -classe  $[\mathcal{O}_{Y''_a}]$  telle que  $\{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])\} = \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$ .

Supposons qu'il existe deux classes  $[\mathcal{O}_{Y''_a}], [\mathcal{O}'_{Y''_a}]$  de  $Y''_a$  telles que

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])\} &= \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\} \\ &= \{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}])\}. \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}_Y] = \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}])$  alors  $[\mathcal{O}_{Y''_a}] = [\mathcal{O}'_{Y''_a}]$  par injectivité de  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  (Proposition 14 (ii)). Supposons maintenant l'autre cas :

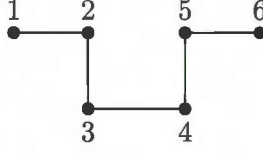
$$\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}_Y] \text{ et } \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}'_Y].$$

En vertu du Corollaire 6,  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) \neq \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}])$  et donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) &= [\mathcal{O}'_Y] = \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}]) \text{ et} \\ \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) &= [\mathcal{O}_Y] = \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}'_{Y''_a}]). \end{aligned}$$

Soit  $P$  un cycle simple du graphe non orienté  $Y$  contenant l'arête  $a$ . Nous supposons sans perte de généralité que  $v$  précède  $w$  dans  $P$ . Comme  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}_Y]$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}'_Y]$ , nous avons par le Corollaire 5

$$\nu_P([\mathcal{O}_Y]) = \nu_P([\mathcal{O}'_Y]) + 2. \quad (3.3)$$



**Figure 3.8** Graphe linéaire à 6 sommets.

De même, comme  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}'_{Y''}]) = [\mathcal{O}'_Y]$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}'_{Y''}]) = [\mathcal{O}_Y]$ , nous avons

$$\mathcal{V}_P([\mathcal{O}'_Y]) = \mathcal{V}_P([\mathcal{O}_Y]) + 2$$

et donc

$$\mathcal{V}_P([\mathcal{O}_Y]) = \mathcal{V}_P([\mathcal{O}'_Y]) - 2,$$

ce qui contredit l'équation (3.3). Ainsi, nous avons bien que le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne contient aucune arête multiple. ■

Nous pouvons maintenant montrer que le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  est une forêt en montrant qu'il ne contient aucun cycle. Dans le Théorème 4, nous montrons non seulement que  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne contient aucun cycle, mais aussi que chacun de ses sommets est au maximum de degré 2 : le graphe effondré est isomorphe à un ensemble disjoint de graphes linéaires.

**Théorème 4.** *Soit  $a$  une arête contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  est isomorphe à un ensemble disjoint de graphes linéaires.*

*Démonstration.* Un graphe linéaire est un graphe dont tous les sommets sont de degré inférieur ou égal à 2 et qui ne contient aucun cycle, voir la Figure 3.8 pour un exemple. Montrons donc tout d'abord que chaque sommet du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  est de degré inférieur ou égal à 2. Nous savons premièrement que  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne contient aucune boucle et aucune arête multiple en vertu du Corollaire 6 et de la Proposition 16. Donc si un sommet  $[\mathcal{O}_Y]$  de  $\mathcal{E}_a(Y)$  est de degré  $n$ , où  $n \geq 3$ , nous avons par construction de  $\mathcal{E}_a(Y)$

qu'il existe  $n$   $\kappa$ -classes de  $Y''$ , notées  $[\mathcal{O}_{Y''}^{(1)}], [\mathcal{O}_{Y''}^{(2)}], \dots, [\mathcal{O}_{Y''}^{(n)}]$ , telles que

$$\{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i)}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i)}])\} = \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}_Y^{(i)}]\}$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ , où  $[\mathcal{O}_Y^{(i)}]$  est une  $\kappa$ -classe de  $Y$ . Comme  $n \geq 3$ , la classe  $[\mathcal{O}_Y]$  aurait plus d'un antécédent soit par  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  ou par  $\mathcal{R}_{(w,v)}$ , ce qui contredit que  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$  sont injectives. Ainsi, tous les sommets du graphe effondré sont de degré inférieur ou égal à 2.

Il reste à montrer que le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne contient aucun cycle. Supposons par contradiction que

$$C = \{[\mathcal{O}_Y^{(1)}], [\mathcal{O}_Y^{(2)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}], [\mathcal{O}_Y^{(1)}]\}$$

est un cycle de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Posons  $[\mathcal{O}_Y^{(n+1)}] = [\mathcal{O}_Y^{(1)}]$ , c'est-à-dire, nous considérons que  $n+1 \equiv 1$ , et notons que  $\{[\mathcal{O}_Y^{(i)}], [\mathcal{O}_Y^{(i+1)}]\}$  est une arête de  $\mathcal{E}_a(Y)$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Par définition du graphe effondré, il existe donc une classe  $[\mathcal{O}_{Y''}^{(i)}]$  du graphe  $Y''$  telle que

$$\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i)}]) = [\mathcal{O}_Y^{(i)}] \text{ et } \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i)}]) = [\mathcal{O}_Y^{(i+1)}]$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ , voir Figure 3.9 pour une illustration de ceci.

Soit  $1 \leq i \leq n$ . En vertu du Lemme 5, si  $P$  est un cycle simple du graphe non orienté  $Y$  dans lequel le sommet  $v$  précède le sommet  $w$ , nous avons que  $\nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i)}]) = \nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i+1)}]) + 2$  et donc

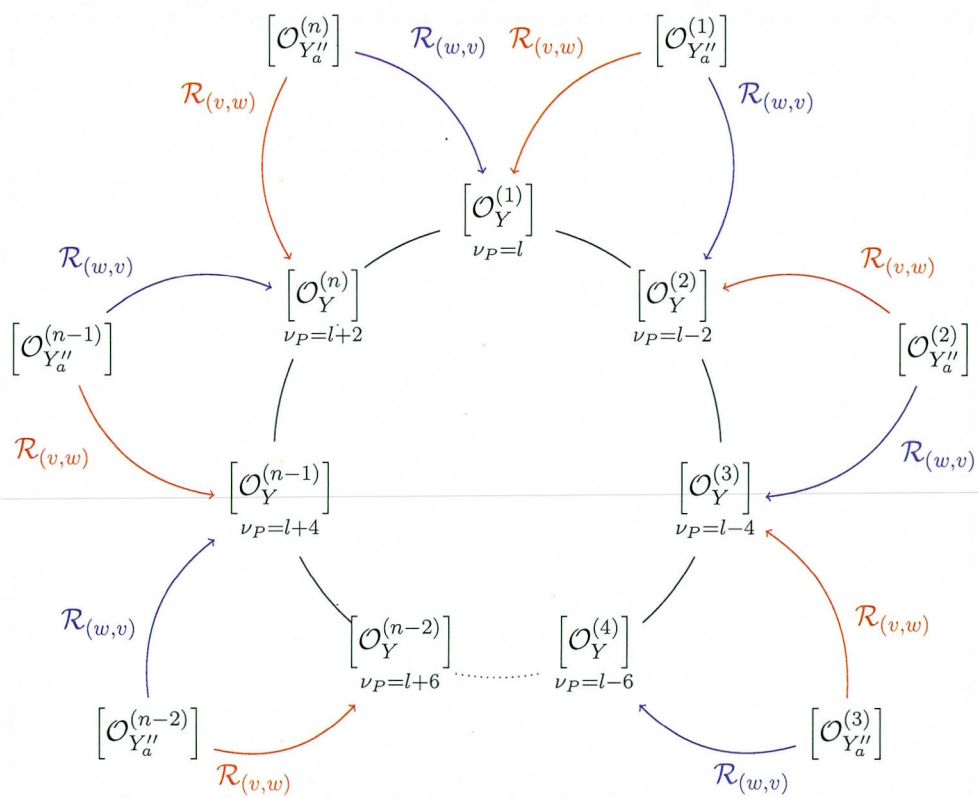
$$\nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i+1)}]) = \nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i)}]) - 2.$$

En particulier, la valeur de  $\nu_P$  diffère d'exactly 2 pour chaque sommets adjacents dans  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Si  $i \geq 2$ ,  $\{[\mathcal{O}_Y^{(i-1)}], [\mathcal{O}_Y^{(i)}]\}$  est aussi une arête de  $\mathcal{E}_a(Y)$  et donc nous avons

$$\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i-1)}]) = [\mathcal{O}_Y^{(i-1)}] \text{ et } \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''}^{(i-1)}]) = [\mathcal{O}_Y^{(i)}].$$

Pour le même cycle  $P$  du graphe  $Y$ , nous avons donc

$$\nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i-1)}]) = \nu_P([\mathcal{O}_Y^{(i)}]) + 2.$$



**Figure 3.9** Illustration de la preuve du Théorème 4.



En appliquant ceci à  $i = 1 \equiv n + 1$ , nous obtenons

$$\nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(1)}] \right) = \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(n)}] \right) - 2 < \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(n)}] \right). \quad (3.4)$$

Ainsi, nous avons par récurrence :

$$\begin{aligned} \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(n)}] \right) &= \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(n-1)}] \right) - 2 \\ &= \dots \\ &= \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(1)}] \right) - 2(n-1) < \nu_P \left( [\mathcal{O}_Y^{(1)}] \right) \end{aligned}$$

ce qui contredit l'inéquation (3.4). Par conséquent, le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  ne peut contenir de cycle et donc  $\mathcal{E}_a(Y)$  est bien isomorphe à un ensemble disjoint de graphes linéaires. ■

### 3.3 Caractérisation des arêtes et des composantes connexes du graphe effondré

Cette dernière section consiste à démontrer que les  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y_a''$  sont en bijection avec l'ensemble des arêtes du graphe effondré, tandis que les  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y_a'$  sont en bijection avec l'ensemble de ses composantes connexes.

**Proposition 17.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Soit  $Y_a''$  le graphe obtenu de  $Y$  en contractant cette arête. Alors l'ensemble des arêtes du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  est en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence de  $Y_a''$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  la fonction qui associe à chaque classe  $[\mathcal{O}_{Y_a''}]$  de  $Y_a''$  l'arête  $\{ \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]) \}$  de  $\mathcal{E}_a(Y)$  :

$$\begin{aligned} f: \text{Acyc}(Y_a'') / \sim_\kappa &\rightarrow A_{\mathcal{E}_a(Y)} \\ [\mathcal{O}_{Y_a''}] &\mapsto \{ \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]) \}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 14 (i), cette fonction est bien définie. De plus, si  $\{ [\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}_Y'] \}$  est une arête de  $\mathcal{E}_a(Y)$ , alors il existe  $[\mathcal{O}_{Y_a''}]$  telle que  $\{ \mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y_a''}]) \} =$



$\{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$ . D'où  $f$  est surjective. Par la Proposition 16, nous avons que pour toute paire de sommet  $[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]$  de  $\mathcal{E}_a(Y)$ , il y a au plus une classe  $[\mathcal{O}_{Y''}]$  de  $Y''_a$  telle que  $f([\mathcal{O}_{Y''}]) = \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$ . D'où  $f$  est injective et donc  $f$  est une bijection. ■

3.3.1 Le nombre  $\kappa(Y)$  correspond au nombre de composantes connexes du graphe effondré

Nous démontrons maintenant que les composantes connexes du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  sont en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y'_a$  obtenu du graphe  $Y$  en supprimant l'arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$ . D'abord, la proposition suivante nous permet de démontrer que le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{E}_a(Y)$  est toujours inférieur ou égal au nombre de  $\kappa$ -classes du graphe  $Y'_a$ .

**Proposition 18.** *Soit  $a$  une arête contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Alors les  $\kappa$ -classes contenues dans une même composante connexe du graphe  $\mathcal{E}_a(Y)$  se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $\text{Acyc}(Y'_a)$ .*

*Démonstration.* Pour toute arête  $\{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}$  du graphe effondré, les classes  $[\mathcal{O}_Y]$  et  $[\mathcal{O}'_Y]$  se restreignent à une même classe de  $Y'_a$ . En effet, par construction du graphe effondré, il existe une classe  $[\mathcal{O}_{Y''}] \in \text{Acyc}(Y''_a) / \sim_\kappa$  telle que

$$\{\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''}]), \mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''}])\} = \{[\mathcal{O}_Y], [\mathcal{O}'_Y]\}.$$

Or, comme les classes  $[\mathcal{O}_Y]$  et  $[\mathcal{O}'_Y]$  sont obtenues grâce aux relèvements  $\mathcal{R}_{(v,w)}$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}$ , nous pouvons supposer que les orientations représentantes  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont obtenues grâce aux relèvements  $r_{(v,w)}$  et  $r_{(w,v)}$  de  $\mathcal{O}_{Y''}$  et donc diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a$ . Par conséquent, en supprimant l'arc  $(v, w)$  et l'arc  $(w, v)$  de ces deux orientations, nous obtenons une même orientation acyclique  $\mathcal{O}_{Y'_a}$  du graphe  $Y'_a$ . De ce fait, les classes  $[\mathcal{O}_Y]$  et  $[\mathcal{O}'_Y]$  se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$ .

Soit  $C = \{[\mathcal{O}_Y^{(1)}], [\mathcal{O}_Y^{(2)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}]\}$  l'ensemble des sommets d'une composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . En particulier, cette composante connexe est un graphe linéaire et

nous pouvons supposer que les  $\{[\mathcal{O}_Y^{(i)}], [\mathcal{O}_Y^{(i+1)}]\}$  sont les arêtes de cette composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ . Donc  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}]$  et  $[\mathcal{O}_Y^{(2)}]$  se restreignent à une même classe  $[\mathcal{O}_{Y'_a}]$  de  $Y'_a$ . Puis, de proche en proche, les classes  $[\mathcal{O}_Y^{(2)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}]$  se restreignent aussi forcément à la classe  $[\mathcal{O}_{Y'_a}]$ . Ainsi, toutes les  $\kappa$ -classes de  $Y$  qui sont contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$  se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$ . ■

*Remarque 15.* Le fait que le graphe effondré est un graphe linéaire n'est pas nécessaire à la démonstration de ce résultat, mais en simplifie les notations. En effet, cette proposition aurait pu être démontrée plus généralement en utilisant le fait que pour chaque paire de sommets contenus dans une même composante connexe d'un graphe, il existe un chemin liant ces derniers. En montrant comme ci-dessus que les  $\kappa$ -classes de  $Y$  contenues dans un chemin du graphe effondré se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$ , nous obtenons bien le résultat de la Proposition 18.

Nous avons montré à la section 2.3.3 du Chapitre 2 que si deux orientations acycliques d'un graphe  $Y$  diffèrent seulement par l'orientation d'un pont, alors ces deux orientations sont contenues dans une même classe de  $Y$ . Afin de démontrer qu'il existe une bijection entre les composantes connexes du graphe  $\mathcal{E}_a(Y)$  et les classes d'équivalence du graphe  $Y'_a$ , nous utilisons le fait que si deux orientations acycliques diffèrent seulement par l'orientation d'une arête contenue dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ , alors ces orientations sont contenues dans deux  $\kappa$ -classes différentes de  $Y$ . Pour démontrer ceci, nous avons besoin du résultat suivant.

**Corollaire 7.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Si deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  de  $Y$  diffèrent seulement par l'orientation de  $a$ , alors  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont  $a$ -contractiles. En particulier,  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y)$  et  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}'_Y)$  sont acycliques.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y \in \text{Acyc}(Y)$  deux orientations qui diffèrent seulement par l'orientation de  $a = \{v, w\} \in A_Y$ . Sans perte de généralité, nous posons  $\mathcal{O}_Y(a) = (v, w)$  et  $\mathcal{O}'_Y(a) = (w, v)$ . Par le Théorème 1 du chapitre précédent, il suffit de montrer que  $\mathcal{O}_Y$

et  $\mathcal{O}'_Y$  ne contiennent aucun chemin orienté de longueur plus grande que 1 de  $v$  vers  $w$  ou de  $w$  vers  $v$ .

Supposons par contradiction que  $P = (v, s_1, \dots, s_k, w)$  est un chemin orienté de  $\mathcal{O}_Y$ . Alors  $P$  est aussi un chemin orienté de  $\mathcal{O}'_Y$  puisque  $\mathcal{O}_Y(b) = \mathcal{O}'_Y(b)$  pour toute arête  $b \neq a \in A_Y$ . Par conséquent,  $P = (v, s_1, \dots, s_k, w, v)$  est un cycle de  $\mathcal{O}'_Y$  puisque  $\mathcal{O}'_Y(a) = (w, v)$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $\mathcal{O}'_Y$  est acyclique, donc  $\mathcal{O}_Y$  ne contient aucun chemin orienté de  $v$  vers  $w$ , et il en est de même pour  $\mathcal{O}'_Y$ . De manière analogue, si  $\mathcal{O}'_Y$  contient un chemin orienté de  $w$  vers  $v$ , alors  $\mathcal{O}_Y$  contient un cycle ce qui contredit le fait que  $\mathcal{O}_Y$  est acyclique. D'où le résultat. ■

**Proposition 19.** *Soit  $Y$  un graphe non orienté et  $a$  une arête contenue dans un cycle de  $Y$ . Si  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont deux orientations acycliques de  $Y$  qui diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a$ , alors  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont obtenues des relèvements  $r_{(v,w)}$  et  $r_{(w,v)}$  d'une même orientation acyclique  $\mathcal{O}_{Y''}$  du graphe  $Y''_a$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  deux orientations acycliques de  $Y$  qui diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a = \{v, w\}$  contenu dans un cycle du graphe non orienté  $Y$ . Supposons sans perte de généralité que  $\mathcal{O}_Y(\{v, w\}) = (v, w)$  et  $\mathcal{O}'_Y(\{v, w\}) = (w, v)$ . De plus,  $\mathcal{C}_a(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{C}_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_{Y''}$  puisque  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  diffèrent seulement par l'orientation de  $a$ . Par le Corollaire 7, nous savons que  $\mathcal{O}_{Y''}$  est acyclique, donc nous avons par définition de la fonction de relèvement que  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}_Y$  et  $r_{(w,v)}(\mathcal{O}_{Y''}) = \mathcal{O}'_Y$ . D'où le résultat. ■

Finalement, nous montrons qu'il existe une bijection entre les composantes connexes du graphe effondré et l'ensemble des  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y'_a$ .

**Théorème 5.** *Les composantes connexes du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  sont en bijection avec l'ensemble  $\text{Acyc}(Y'_a)/\sim_\kappa$ .*

*Démonstration.* Soit  $n_c$  le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Par la Proposition 18, nous savons que les  $\kappa$ -classes de  $Y$  qui sont contenues dans une même composante

connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$  se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$ . Ainsi,  $n_c \geq \kappa(Y'_a)$ . Inversement, montrons que les classes de  $Y$  qui se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$  sont contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Nous aurons ainsi que  $n_c \leq \kappa(Y'_a)$  et donc que  $n_c = \kappa(Y'_a)$ .

Soient  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}]$  des classes du graphe  $Y$  qui se restreignent à une même classe  $[\mathcal{O}_{Y'_a}]$  du graphe  $Y'_a$ . Posons  $n = 2$ . Nous avons alors

$$\mathcal{D}_a([\mathcal{O}_Y^{(1)}]) = \mathcal{D}_a([\mathcal{O}_Y^{(2)}]) = [\mathcal{O}_{Y'_a}].$$

Nous rappelons que la fonction  $\mathcal{D}_a$  est la fonction de suppression d'arc, factorisée aux classes d'équivalence. En particulier, il existe  $\mathcal{O}_Y \in [\mathcal{O}_Y^{(1)}]$  et  $\mathcal{O}'_Y \in [\mathcal{O}_Y^{(2)}]$  telles que  $d_a(\mathcal{O}_Y) = d_a(\mathcal{O}'_Y) = \mathcal{O}_{Y'_a}$  et donc  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  diffèrent seulement par l'orientation de l'arête  $a$ . En vertu de la Proposition 19, il existe donc une orientation  $\mathcal{O}_{Y''_a}$  du graphe  $Y''_a$  telle que  $r_{(v,w)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}_Y$  et  $r_{(w,v)}(\mathcal{O}_{Y''_a}) = \mathcal{O}'_Y$ . Nous avons ainsi  $\mathcal{R}_{(v,w)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}_Y^{(1)}]$  et  $\mathcal{R}_{(w,v)}([\mathcal{O}_{Y''_a}]) = [\mathcal{O}_Y^{(2)}]$  par la Proposition 14 (i). Par conséquent,  $\{[\mathcal{O}_Y^{(1)}], [\mathcal{O}_Y^{(2)}]\}$  est une arête du graphe effondré et donc  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}]$  et  $[\mathcal{O}_Y^{(2)}]$  sont contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ .

Supposons maintenant que pour tout sous-ensemble de  $n-1$   $\kappa$ -classes du graphe  $Y$  qui se restreignent à une même  $\kappa$ -classe de  $Y'_a$ , ces  $n-1$  classes sont contenues dans une même composante connexe du graphe effondré. Nous avons alors que si les classes  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n-1)}]$  se restreignent à la même classes  $[\mathcal{O}_{Y'_a}]$  de  $Y'_a$ , alors ces classes sont contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Ainsi, si la classe  $[\mathcal{O}_Y^{(n)}]$  se restreint aussi à la classe  $[\mathcal{O}_{Y'_a}]$  de  $Y'_a$ , nous avons par hypothèse de récurrence que  $[\mathcal{O}_Y^{(2)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}]$  sont contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Mais comme  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}]$  et  $[\mathcal{O}_Y^{(2)}]$  sont aussi contenues dans la même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ , nous avons bien que les classes  $[\mathcal{O}_Y^{(1)}], \dots, [\mathcal{O}_Y^{(n)}]$  sont toutes contenues dans une même composante connexe de  $\mathcal{E}_a(Y)$ . Ainsi,  $n_c \leq \kappa(Y'_a)$  et par conséquent les composantes connexes du graphe effondré sont en bijection avec l'ensemble des  $\kappa$ -classes du graphe  $Y'_a$ .



### 3.3.2 Fin de la démonstration du Théorème 2

La démonstration de la formule de récurrence énoncée au Théorème 2 du chapitre précédent nécessitait une étude approfondie du graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$  du graphe  $Y$  et de l'arête  $a$  contenue dans un cycle de  $Y$  présenté dans ce chapitre. D'abord, nous avons bien défini ce graphe effondré à la section 3.1.3. Nous devions ensuite démontrer que ce graphe est une forêt, ce qui a été prouvé à la section 3.2.2. Puis, il restait à démontrer que les arêtes du graphe effondré sont en bijection avec les  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y''_a$ , obtenu à partir du graphe  $Y$  en contractant l'arête  $a$ , tandis que les  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y'_a$  obtenu en supprimant l'arête  $a$  du graphe  $Y$  sont en bijection avec les composantes connexes du graphe effondré. L'existence de la première bijection a été montrée dans la Proposition 17 et l'existence de la deuxième, dans le Théorème 5.

Ces derniers résultats concluent l'étude du graphe effondré et complète par le fait même la démonstration du Théorème 2. Nous avons donc bien démontré que pour un graphe quelconque  $Y$  et une arête  $a$  comprise dans un cycle de ce graphe,

$$\kappa(Y) = \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a)$$

ou bien le graphe  $Y$  est un arbre et alors  $\kappa(Y) = 1$ .

## CHAPITRE IV

### APPLICATIONS DE LA RELATION DE CLICS

La relation de clic se manifeste dans plusieurs domaines des mathématiques. Nous allons présenter dans ce chapitre deux problèmes combinatoires dont la solution revient à compter le nombre  $\kappa(Y)$  de classes d'équivalence pour la relation de clic. Premièrement, nous discutons un résultat de la théorie des groupes de Coxeter : le problème de l'énumération des classes de conjugaison des éléments de Coxeter. À cette fin, nous rappelons d'abord certaines notions des groupes de Coxeter. Nous retrouvons ensuite des résultats bien connus des groupes de Coxeter à partir de la formule de récurrence pour  $\kappa(Y)$ . Puis nous terminons notre étude en présentant brièvement comment ce nombre  $\kappa(Y)$  est lié au polynôme de Tutte.

#### 4.1 Groupes de Coxeter et éléments de Coxeter

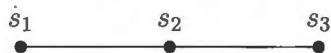
Nous rappelons dans cette section les notions sur les groupes de Coxeter dont nous avons besoin pour établir le lien entre la relation de clic et les classes de conjugaison des éléments de Coxeter. Pour plus de détails, voir le livre *Reflection groups and Coxeter groups* (Humphreys, 1990).

Un *système de Coxeter* est défini comme étant un couple  $(W, S)$  où  $W$  est un groupe et  $S \subset W$  un ensemble de générateurs de  $W$  satisfaisant uniquement aux relations

$$(ss)^1 = s^2 = 1_W$$

$$(st)^{m_{st}} = 1_W$$





**Figure 4.1** Graphe de Coxeter du groupe symétrique

$\mathfrak{S}_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid (s_1 s_3)^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = e \rangle$ . Les  $s_i$  sont donc les transpositions de la forme  $\tau_i = (i, i + 1)$

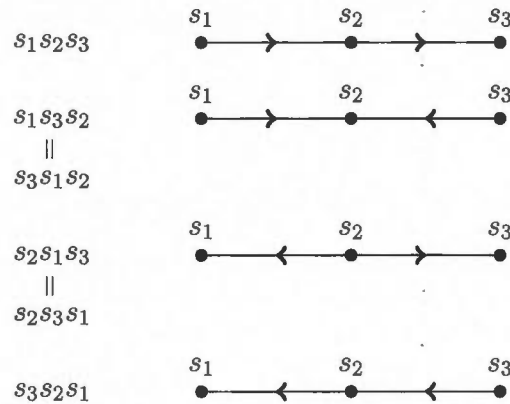
pour tout  $s, t \in S$  tel que  $s \neq t$  et  $m_{st} \geq 2$ . Dans le cas où il n'y aurait aucune relation entre  $s$  et  $t$ , nous notons  $m_{st} = \infty$ . Le groupe  $W$  est donc un *groupe de Coxeter* pour l'ensemble de générateurs  $S$ . Par exemple, le groupe diédral

$$\mathfrak{D}_n = \langle s, r \mid s^2 = r^n = sr sr = 1_{\mathfrak{D}_n} \rangle$$

est un groupe de Coxeter pour l'ensemble de générateurs  $S = \{s, sr\}$ .

Tout groupe de Coxeter peut être complètement défini par un *graphe de Coxeter* ayant comme ensemble de sommets ses générateurs. L'ensemble de ses arêtes, quant à lui, est déterminé par les relations entre deux générateurs : deux générateurs  $s$  et  $t$  sont reliés par une arête si et seulement si  $m_{st} \geq 3$ . Dans ce cas, nous étiquetons cette arête  $\{s, t\}$  par la valeur de  $m_{st}$ . Comme il est fréquent que  $m_{st} = 3$ , nous prenons comme convention de ne pas étiqueter les arêtes dans ce cas. De plus, si  $m_{st} = 2$ , alors les sommets  $s$  et  $t$  ne sont pas reliés par une arête, et  $s$  et  $t$  commutent. En effet, si  $m_{st} = 2$ , alors  $(st)^2 = stst = 1_W$  et donc  $st = t^{-1}s^{-1} = ts$ . Par conséquent, deux générateurs  $s$  et  $t$  ne sont pas reliés dans le graphe de Coxeter associé si et seulement si  $s$  et  $t$  commutent dans  $W$ . Par exemple, la Figure 4.1 illustre le graphe de Coxeter du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_4$ .

Un *élément de Coxeter* d'un groupe de Coxeter  $W = \langle S \rangle$  est le produit une et une seule fois des générateurs. Autrement dit, un élément de Coxeter est un mot sur l'ensemble des générateurs  $S$  ou encore, une permutation sur l'ensemble des sommets du graphe de Coxeter associé. Par conséquent, chaque élément de Coxeter définit une unique orientation acyclique sur ce graphe, voir Figure 4.2 pour un exemple. Dans l'article *The enumeration of Coxeter elements* (Shi, 1997), l'auteur présente une bijection entre les



**Figure 4.2** Éléments de Coxeter du groupe symétrique

$\mathfrak{S}_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid (s_1 s_3)^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = e \rangle$  et leurs orientations associées.

éléments de Coxeter et les orientations acycliques du graphe de Coxeter associé.

#### 4.1.1 Dénombrement des classes de conjugaison des éléments de Coxeter

Nous présentons dans cette section la correspondance entre la relation de clic sur une orientation acyclique d'un graphe et la conjugaison d'un élément de Coxeter. Cette correspondance est essentiellement due au résultat principal énoncé dans l'article *Conjugacy of Coxeter elements* (Eriksson et Eriksson, 2009) de Henrik et Kimmo Eriksson présentant la relation de rotation sur un élément de Coxeter. Nous étudions d'abord brièvement cette relation de rotation sur un élément de Coxeter et faisons le lien entre les relations de rotation et de clic. Nous énumérons alors le nombre de classes de conjugaison des éléments de Coxeter en toute généralité. Dans cette section, nous donnons les idées de preuve sans toutefois en donner les détails. Les articles d'où proviennent les résultats sont fournis à titre de référence pour ces détails.

#### 4.1.2 Rotation d'un élément de Coxeter et clic

Comme mentionné auparavant, un élément de Coxeter d'un groupe de Coxeter  $W = \langle S \rangle$  est le produit une et une seule fois de ses générateurs. Autrement dit, un

élément de Coxeter est un mot sur l'ensemble  $S$  dans lequel chaque lettre  $s \in S$  apparaît une et une seule fois. Nous utilisons donc dans la suite autant la terminologie d'élément de Coxeter et de *mot de Coxeter*.

Dans l'article *Conjugacy of Coxeter elements* (Eriksson et Eriksson, 2009), les auteurs définissent une *rotation* d'un mot de Coxeter le fait de déplacer la première lettre du mot à la fin de ce mot. Par exemple, si  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  et  $w = s_1 s_2 s_3 s_4$  est un mot de Coxeter, une rotation de  $w$  résulte en le mot de Coxeter  $w' = s_2 s_3 s_4 s_1$ . Rappelons aussi que deux générateurs  $s, t \in S$  d'un groupe de Coxeter  $W = \langle S \rangle$  sont tels que  $m_{st} = 2$ , alors  $s$  et  $t$  commutent. Ainsi, deux mots de Coxeter sont dits être *rotation-équivalents* si l'un peut être obtenu de l'autre par une suite de rotations et de commutations de générateurs.

Il est clair que cette notion de rotation correspond exactement à la notion de décalage cyclique vue à la Définition 3 du Chapitre 2 de ce mémoire. De plus, rappelons que deux générateurs  $s$  et  $t$  commutent dans  $W$  si et seulement si  $s$  et  $t$  ne sont pas adjacents dans le graphe de Coxeter associé. Soit donc  $Y$  le graphe de Coxeter associé au groupe de Coxeter  $W$ . Soit  $w$  et  $w'$  deux mots de Coxeter et  $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}'_Y$  leurs orientations acycliques associées respectives. D'après la Proposition 8 du Chapitre 2, nous concluons donc que  $w$  et  $w'$  sont rotation-équivalents si et seulement si  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont clic-équivalentes.

De plus, une rotation sur un mot de Coxeter correspond à conjuguer ce mot de Coxeter par la première lettre du mot. En effet, si  $W = \langle S \rangle$  où  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  et si  $w = s_1 s_2 s_3 s_4$  est un mot de Coxeter, alors

$$s^{-1} w s_1 = s_1^{-1} s_1 s_2 s_3 s_4 s_1 = s_2 s_3 s_4 s_1 = w'$$

et  $w'$  est bien le résultat d'une rotation sur  $w$ .

Les auteurs de l'article *Conjugacy of Coxeter elements* (Eriksson et Eriksson, 2009) démontrent que deux éléments de Coxeter sont conjugués si et seulement si ils sont rotation-équivalents. Ce résultat était bien connu dans le cas fini, mais pas dans le cas général des groupes de Coxeter infini. Nous ne donnons pas la démonstration de ce

résultat et référons le lecteur au Théorème 1.1 de cet article. Ainsi, nous concluons que  $\kappa(Y)$  compte exactement le nombre de classes de conjugaison des éléments d'un groupe de Coxeter, fini ou infini, dont  $Y$  est le graphe de Coxeter.

## 4.2 Quelques résultats classiques

À partir du fait que  $\kappa(Y)$  correspond au nombre de classes de conjugaison des éléments de Coxeter d'un groupe de Coxeter dont  $Y$  est le graphe de Coxeter, nous retrouvons certains résultats connus. Notamment, si un groupe de Coxeter est fini, alors ses éléments de Coxeter forment qu'une seule classe de conjugaison. En effet, le graphe de Coxeter  $Y$  correspondant à un groupe de Coxeter fini est toujours un arbre et nous retrouvons donc bien d'après le Théorème 2 que  $\kappa(Y) = 1$ .

De plus, pour un groupe de Coxeter infini dont le graphe de Coxeter  $Y$  contient exactement un cycle de longueur  $n$ , c'est-à-dire le groupe de Coxeter affine de type  $\tilde{A}_n$ , les éléments de Coxeter de ce groupe forment  $n - 1$  classes de conjugaison, voir (Shi, 2001). En nous référant à la formule de récurrence  $\kappa(Y) = \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a)$ , nous retrouvons aussi ce résultat. En effet, si  $Y$  contient exactement un cycle de longueur  $n$  et que  $a$  est une arête contenue dans ce cycle, nous obtenons que le graphe  $Y'_a$  est un arbre. D'où  $\kappa(Y'_a) = 1$ . De plus, en contractant l'arête  $a$  dans  $Y$ , nous obtenons alors un nouveau graphe  $G$  contenant exactement un cycle de longueur  $n - 1$ . À chaque étape de la récurrence, nous obtenons donc toujours un arbre et un graphe contenant un cycle dont la longueur diminue de 1 à chaque étape de la récurrence. Or, pour obtenir un arbre à partir d'un cycle de longueur  $n$ , nous devons effectuer  $n - 2$  contractions d'arête successives. Ainsi, nous obtenons par récurrence :

$$\begin{aligned}\kappa(Y) &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-2} + 1 \\ &= n - 1.\end{aligned}$$

### 4.3 Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d'un graphe non orienté est un polynôme bien connu en théorie des graphes. En particulier, il est une généralisation du polynôme chromatique servant à compter le nombre de coloriage pour un graphe donné. Nous expliquons dans cette section pourquoi le nombre  $\kappa(Y)$  de classes d'équivalence du graphe  $Y$  pour la relation de clic peut être trouvé par une évaluation du polynôme de Tutte.

#### 4.3.1 Polynôme de Tutte et coupe-équivalence

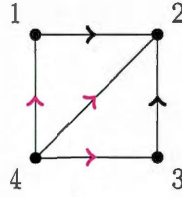
**Définition 8.** Soit  $Y$  un graphe non orienté contenant  $p$  ponts et  $b$  boucles. Le *polynôme de Tutte* du graphe  $Y$  est défini par la relation de récurrence suivante.

- (i) Si  $Y$  ne contient aucun cycle, alors  $T_Y(x, y) = x^p y^b$  ;
- (ii) Si  $Y$  contient au moins un cycle et si  $a$  est une arête contenue dans un cycle de  $Y$ , alors

$$T_Y(x, y) = T_{Y'_a}(x, y) + T_{Y''_a}(x, y)$$

où  $Y'_a$  et  $Y''_a$  sont respectivement les graphes obtenus en supprimant et contractant l'arête  $a$ .

La récurrence définissant le polynôme de Tutte et la formule de récurrence étudiée dans ce mémoire sont à première vue très similaires. En fait, Beifang Chen (Chen, 2010) démontre dans son article que le polynôme de Tutte évalué en  $T_Y(1, 0)$  compte le nombre de classes d'équivalences pour la relation de *coupe* d'une orientation acyclique. Or, les auteurs de l'article *On enumeration of conjugacy classes of Coxeter elements* sur lequel est basé ce mémoire démontrent dans la dernière partie de l'article que deux orientations acycliques sont  $\kappa$ -équivalentes si et seulement si elles sont coupe-équivalentes. Ainsi, le nombre  $\kappa(Y)$  de  $\kappa$ -classes d'équivalence du graphe  $Y$  peut aussi bien être compté par le polynôme de Tutte. Nous présentons dans la section suivante une idée de la preuve.



**Figure 4.3** Exemple de coupe orientée.

#### 4.3.2 Coupe-équivalence d'orientations acycliques

Une *coupe* d'un graphe  $Y = S_Y, A_Y$ , notée  $\{S_1, S_2\}$ , est une partition de l'ensemble des sommets  $S_Y$  en deux sous-ensembles disjoints  $S_1, S_2$ . Une arête  $\{s, t\} \in A_Y$  *traverse* la coupe  $\{S_1, S_2\}$  si  $s \in S_1$  et  $t \in S_2$ . Nous notons  $[S_1, S_2]$  l'ensemble de ces arêtes. En particulier, si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont les sous-graphes propres du graphe  $Y$  dont l'ensemble des sommets respectifs sont  $S_1$  et  $S_2$ , alors

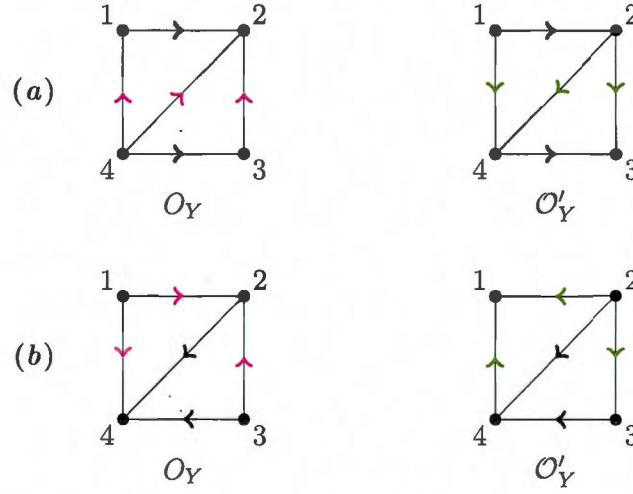
$$Y = Y_1 \cup \{[S_1, S_2]\} \cup Y_2.$$

Si  $\{S_1, S_2\}$  est une coupe du graphe  $Y$ , alors l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  du graphe  $Y$  est *valide* pour cette coupe si toutes les arêtes qui traversent la coupe sont orientées de  $S_1$  vers  $S_2$  ou de  $S_2$  vers  $S_1$ . Dans ce cas, l'ensemble  $[S_1, S_2]$  des arêtes qui traversent la coupe est noté  $(S_1, S_2)$  si les arêtes sont orientées de  $S_1$  vers  $S_2$ . Ainsi,  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \cup \{(S_1, S_2)\} \cup \mathcal{O}_{Y_2}$ .

Par exemple, l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  représentée à la Figure 4.3 est valide pour la coupe  $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$  puisque les arêtes qui traversent cette coupe sont  $\{1, 4\}, \{2, 4\}$  et  $\{3, 4\}$  et ces arêtes sont orientées de  $S_1 = \{4\}$  vers  $S_2 = \{1, 2, 3\}$ .

**Définition 9.** Deux orientations acycliques  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  d'un graphe  $Y = (S_Y, A_Y)$  sont *coupe-équivalentes* si  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}'_Y$  ou s'il existe une coupe  $\{S_1, S_2\}$  du graphe  $Y$  telle que  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont valides pour cette coupe et  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  diffèrent seulement par l'orientation





**Figure 4.4 (a)** Les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont coupe-équivalentes puisqu'elles sont valides pour la coupe  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  et diffèrent seulement par les orientations des arêtes  $\{1, 4\}, \{2, 4\}$  et  $\{3, 4\}$  qui sont les uniques arêtes qui traversent cette coupe.

**(b)** Les orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  ne sont pas coupe-équivalentes puisqu'elles diffèrent seulement par les orientations des arêtes  $\{1, 2\}, \{1, 4\}$  et  $\{1, 3\}$  et il n'existe aucune coupe du graphe telle que cet ensemble d'arêtes soit les arêtes qui traversent cette coupe et pour laquelle  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont valides.

des arêtes qui traversent la coupe, c'est-à-dire, si

$$\{a \in A_Y \mid \mathcal{O}_Y(a) \neq \mathcal{O}'_Y(a)\} = [S_1, S_2].$$

Voir Figure 4.4 pour un exemple.

*Remarque 16.* En particulier, si l'ensemble  $[S_1, S_2]$  des arêtes qui traversent la coupe est orienté  $(S_1, S_2)$  dans  $\mathcal{O}_Y$ , alors cet ensemble est orienté  $(S_2, S_1)$  dans  $\mathcal{O}'_Y$ .

D'après cette définition, deux orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont *coupe-équivalentes* si il existe une coupe  $\{S_1, S_2\}$  telle que  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \cup (S_1, S_2) \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  et  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \cup (S_2, S_1) \cup \mathcal{O}_{Y_2}$  puisque les seules arêtes dont l'orientation est différente dans  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont les arêtes qui traversent la coupe. En appliquant les mêmes idées que dans le Lemme 1 du Chapitre 2,

nous démontrons qu'une suite de clics dont chaque sommet de  $Y_1$  est cliqué exactement une fois inverse seulement l'orientation des arêtes qui traversent la coupe. Par conséquent, si deux orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont coupe-équivalentes, alors elles sont clic-équivalentes.

Pour la réciproque, il suffit de considérer deux orientations  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  telles que  $cl_s(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}'_Y$  pour un sommet  $s \in S_Y$ . Nous montrons alors que  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont coupe-équivalentes pour la coupe  $\{\{s\}, S_Y \setminus \{s\}\}$ . En effet, l'ensemble des arêtes qui traversent cette coupe sont exactement les arêtes incidentes au sommet  $s$ . Rappelons que  $s$  est une source de l'orientation  $\mathcal{O}_Y$  par définition de la relation de clic. Ainsi, toutes les arêtes qui lui sont incidentes sont sortantes, c'est-à-dire, orientée de  $\{s\}$  vers  $S_Y \setminus \{s\}$ . Par conséquent, nous avons  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \cup (\{s_1\}, S_Y \setminus \{s_1\}) \cup \mathcal{O}_{Y_2}$ . En cliquant seulement le sommet  $s$  dans  $\mathcal{O}_Y$ ,  $s$  devient alors un puits de  $\mathcal{O}'_Y$  et nous obtenons donc  $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}_{Y_1} \cup (S_Y \setminus \{s\}, s) \cup \mathcal{O}_{Y_2}$ . D'où  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}'_Y$  sont coupe-équivalentes.

Finalement, comme les relations de clic-équivalence et de coupe-équivalence sont équivalentes, la formule de récurrence  $\kappa(Y) = \kappa(Y'_a) + \kappa(Y''_a)$  est aussi valide pour compter le nombre de classes d'équivalence pour la relation de coupe. De plus, puisque le polynôme de Tutte évalué en  $T_Y(1, 0)$  est soit 1 dans le cas d'un arbre, ou bien compte le nombre de classes d'équivalence pour la relation de coupe, nous avons bien  $\kappa(Y) = T_Y(1, 0)$ .



## CONCLUSION

Nous avons montré dans ce mémoire une formule de récurrence permettant de dénombrer le nombre de classes d'équivalences pour la relation de clic sur les orientations acycliques d'un graphe donné. Cette relation de clic apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques, que ce soit en théorie de la représentation des carquois, dans le contexte du jeu de *chip-firing*, dans une classe particulière des systèmes dynamiques discrets ou alors dans la théorie des groupes de Coxeter. Pour plus de détails, voir les références fournies dans l'introduction de l'article (Macauley et Mortveit, 2008). Nous avons constaté que cette formule de récurrence résout, de manière récursive, le problème du dénombrement des classes de conjugaison des éléments de Coxeter pour un groupe de Coxeter quelconque. Nous avons aussi vu que le nombre de classes d'équivalence pour la relation de clic peut être retrouvé par une évaluation du polynôme de Tutte, polynôme bien connu en théorie des graphes depuis de nombreuses années (Tutte, 1954). Par conséquent, nous pouvons autant énumérer les classes de conjugaison des éléments de Coxeter à partir de la formule de récurrence énoncée dans ce mémoire que par une évaluation du polynôme de Tutte.

Afin de démontrer la formule de récurrence en question, nous avons présenté dans ce mémoire le graphe effondré  $\mathcal{E}_a(Y)$ , introduit par les auteurs Macauley et Mortveit dans l'article *On enumeration of conjugacy classes of Coxeter elements*. Ces mêmes auteurs proposent une seconde démonstration dans leur article *Equivalences on Acyclic Orientations* (Macauley et Mortveit, 2007). Ils introduisent à cet effet un nouveau graphe, noté  $C(Y)$ . Les sommets de ce graphe sont les orientations acycliques du graphe  $Y$ , représentées comme des permutations sur l'ensemble de sommets  $S_Y$ . L'ensemble des arêtes du graphe  $C(Y)$  quant à lui est construit de manière à ce que le nombre  $\kappa(Y)$  de classes d'équivalence pour la relation de clic corresponde au nombre de composantes

connexes du graphe  $C(Y)$ . La ressemblance entre ces graphes  $C(Y)$  et  $\mathcal{E}_a(Y)$  nous pousse à croire qu'il serait intéressant d'étudier ces deux démonstrations en parallèle afin de voir quel rôle joue le graphe effondré dans cette deuxième démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

- Björner, A., L. Lovász et P. W. Shor. 1991. « Chip-firing games on graphs ». *European J. Combin.*, vol. 12, no. 4, p. 283–291.
- Bogart, K. P. 2000. *Introductory combinatorics*. Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, third édition.
- Chen, B. 2010. « Orientations, lattice polytopes, and group arrangements. I. Chromatic and tension polynomials of graphs ». *Ann. Comb.*, vol. 13, no. 4, p. 425–452.
- Eriksson, H., et K. Eriksson. 2009. « Conjugacy of Coxeter elements ». *Electron. J. Combin.*, vol. 16, no. 2, Special volume in honor of Anders Björner, p. Research Paper 4, 7.
- Humphreys, J. E. 1990. *Reflection groups and Coxeter groups*. T. 29, série *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Knuth, D. E. 1981. *The art of computer programming. Vol. 2*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second édition. Seminumerical algorithms, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.
- Macauley, M., et H. S. Mortveit. 2007. « Equivalences on Acyclic Orientations ». *ArXiv e-prints*.
- . 2008. « On enumeration of conjugacy classes of Coxeter elements ». *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, no. 12, p. 4157–4165.
- . 2009. « Cycle equivalence of graph dynamical systems ». *Nonlinearity*, vol. 22, no. 2, p. 421–436.
- Marsh, R., M. Reineke et A. Zelevinsky. 2003. « Generalized associahedra via quiver representations ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, no. 10, p. 4171–4186.
- Pretzel, O. 1986. « On reorienting graphs by pushing down maximal vertices ». *Order*, vol. 3, no. 2, p. 135–153.
- Shi, J.-Y. 1997. « The enumeration of Coxeter elements ». *J. Algebraic Combin.*, vol. 6, no. 2, p. 161–171.
- Shi, J.-y. 2001. « Conjugacy relation on Coxeter elements ». *Adv. Math.*, vol. 161, no. 1, p. 1–19.



Szpilrajn, E. 1930. « Sur l'extension de l'ordre partiel ». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 16, no. 1, p. 386–389.

Tutte, W. T. 1954. « A contribution to the theory of chromatic polynomials ». *Canadian J. Math.*, vol. 6, p. 80–91.